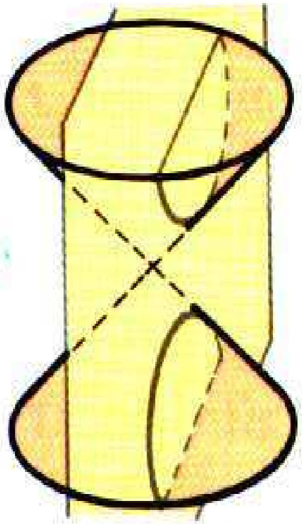
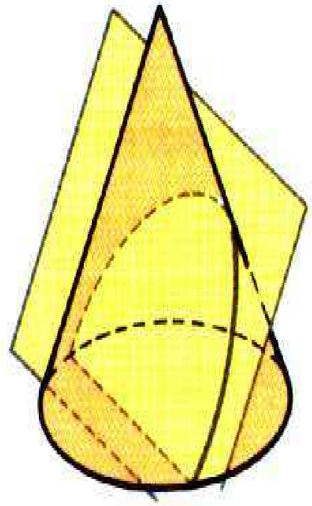
Representación Gráfica de la Hipérbola y la Parábola





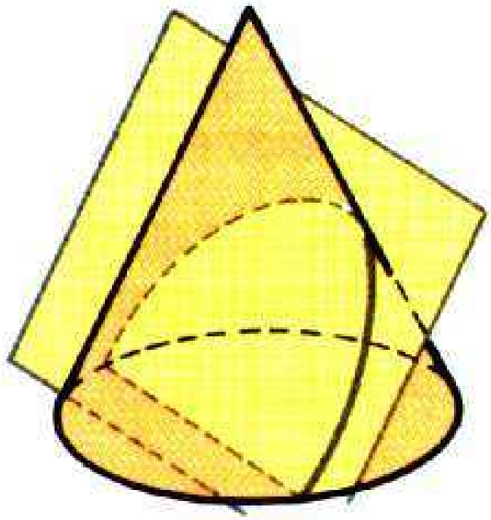
La Parábola

Todas las funciones que tienen por expresión algebraica un polinomio de 2º grado, tienen por representación gráfica una parábola.

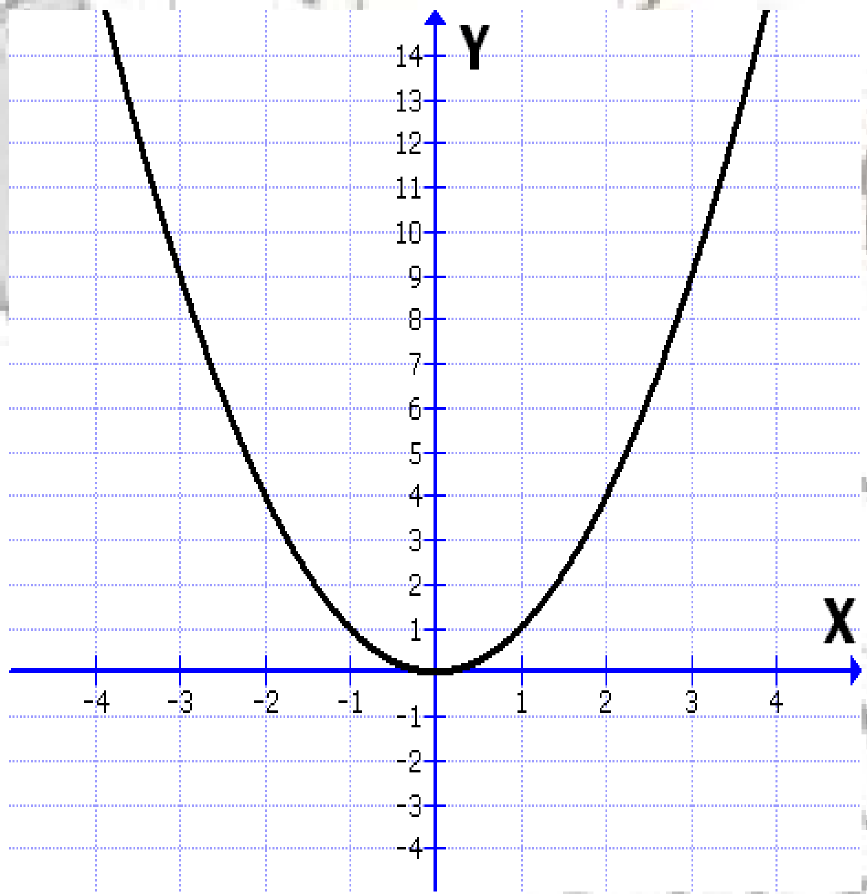
$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Al igual que al dibujar funciones lineales, seguiremos una serie de pasos a la hora de representar la gráfica de dicha función.

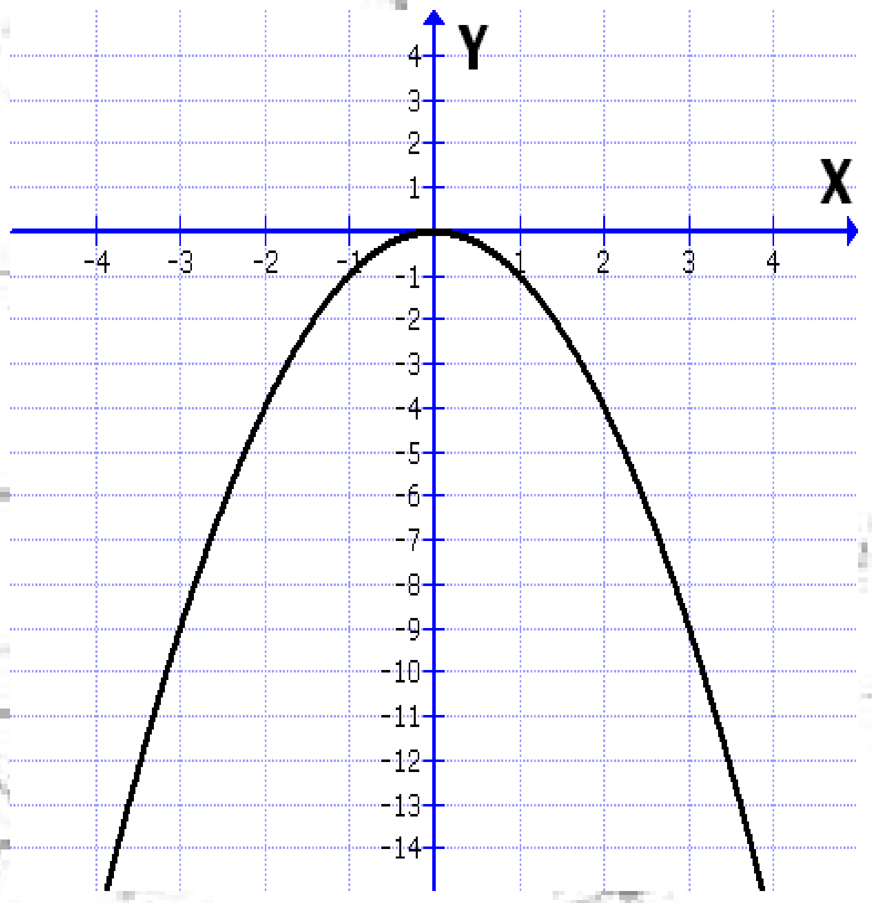
Antes de eso veamos la representación gráfica de varias funciones parabólicas.



La Parábola

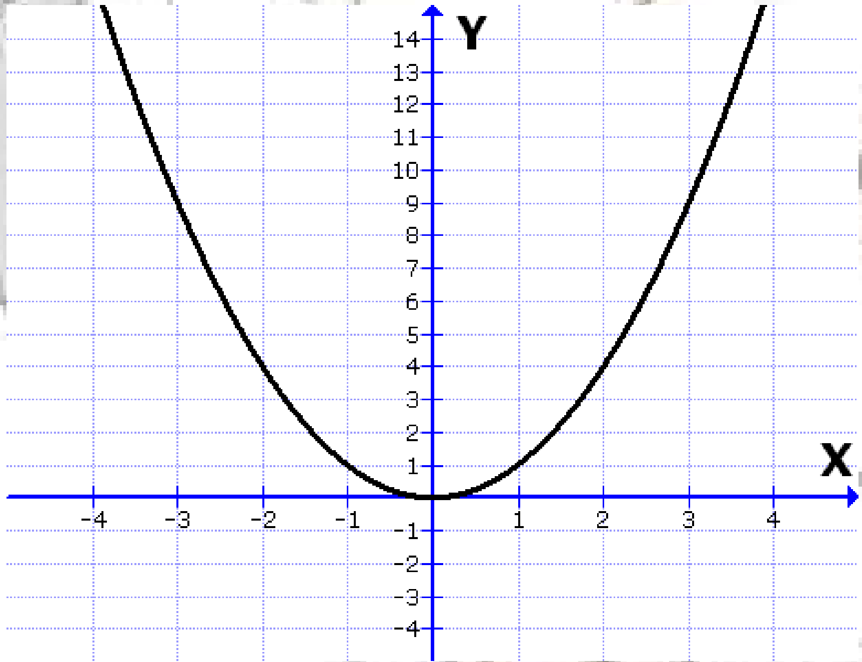


$$f(x) = x^2$$

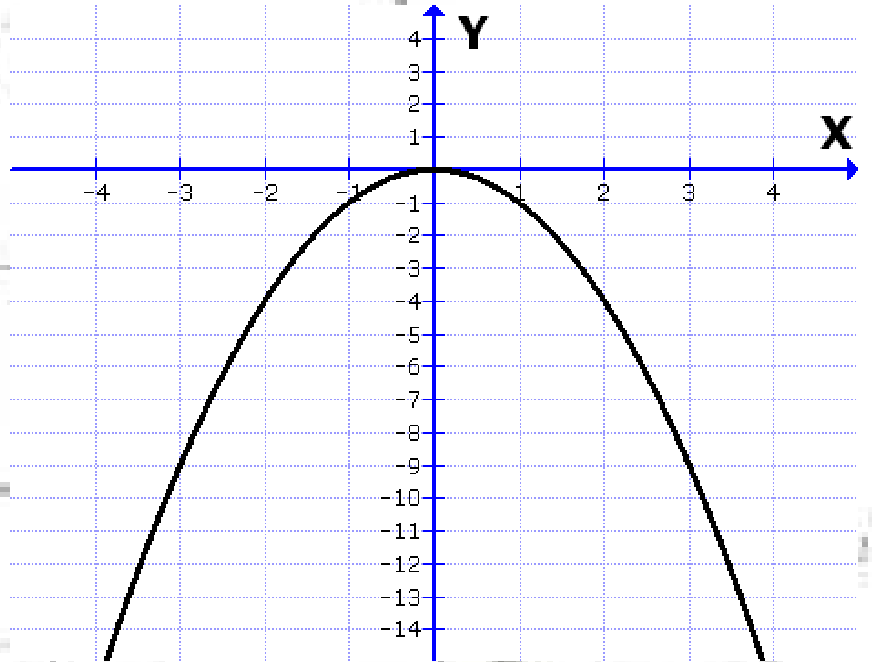


$$f(x) = -x^2$$

La Parábola



$$f(x) = x^2$$



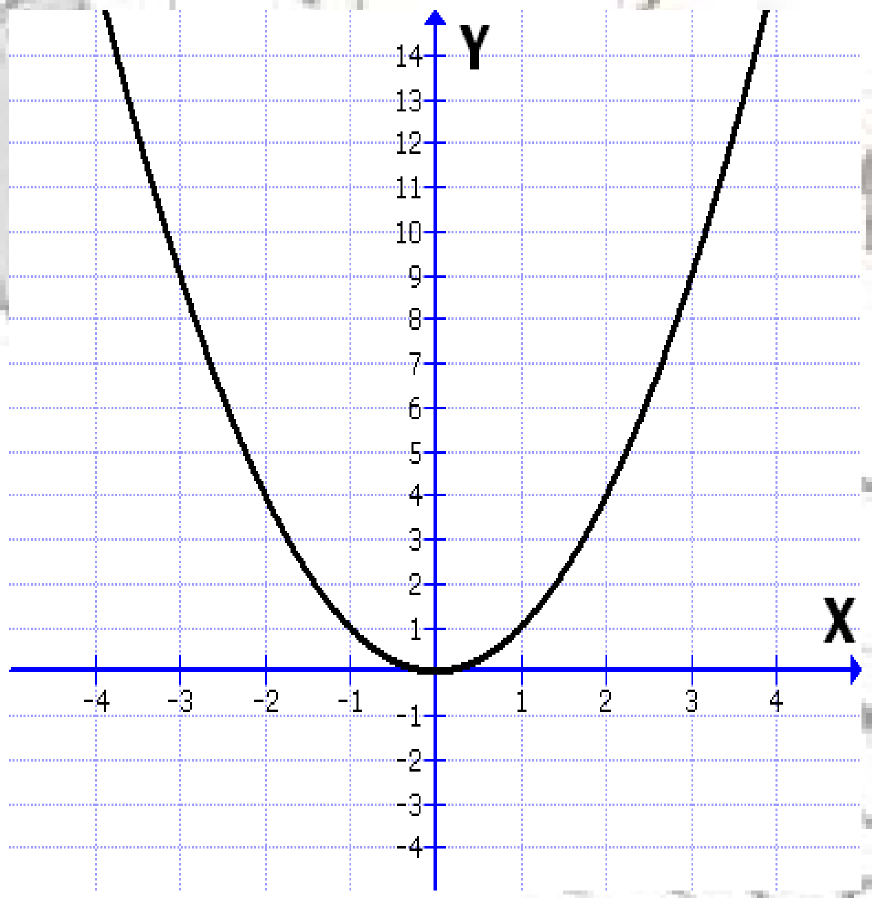
$$f(x) = -x^2$$

1ª propiedad: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

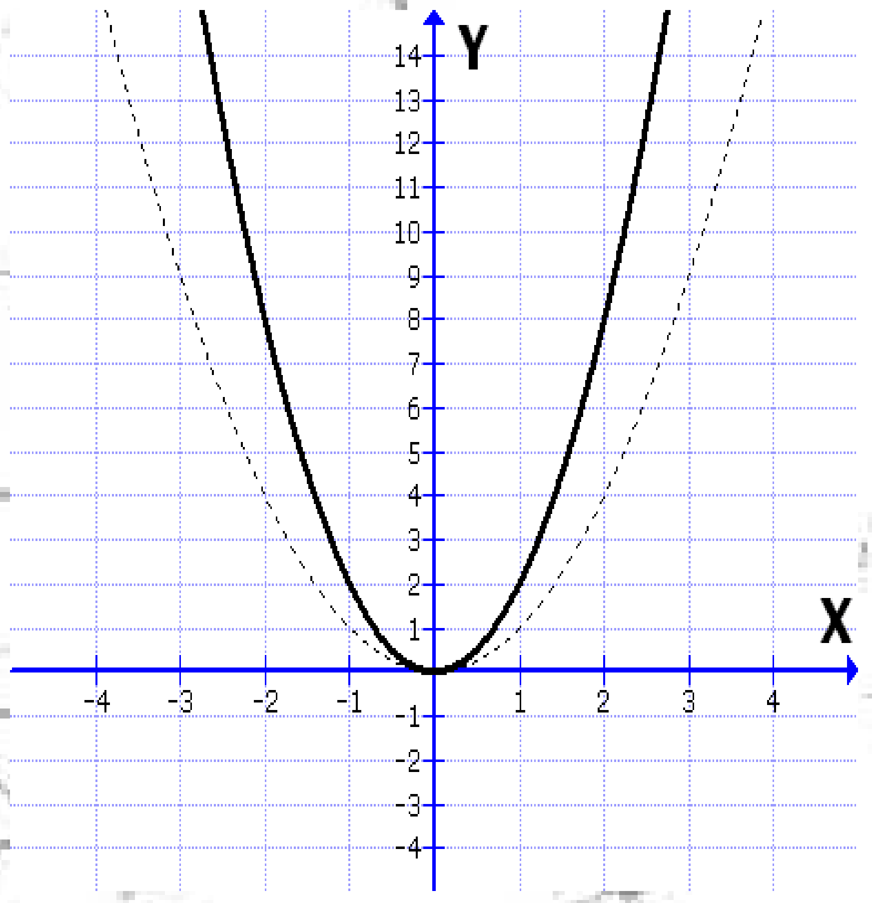
Si a > 0 la parábola será cóncava.

Si a < 0 la parábola será convexa.

La Parábola

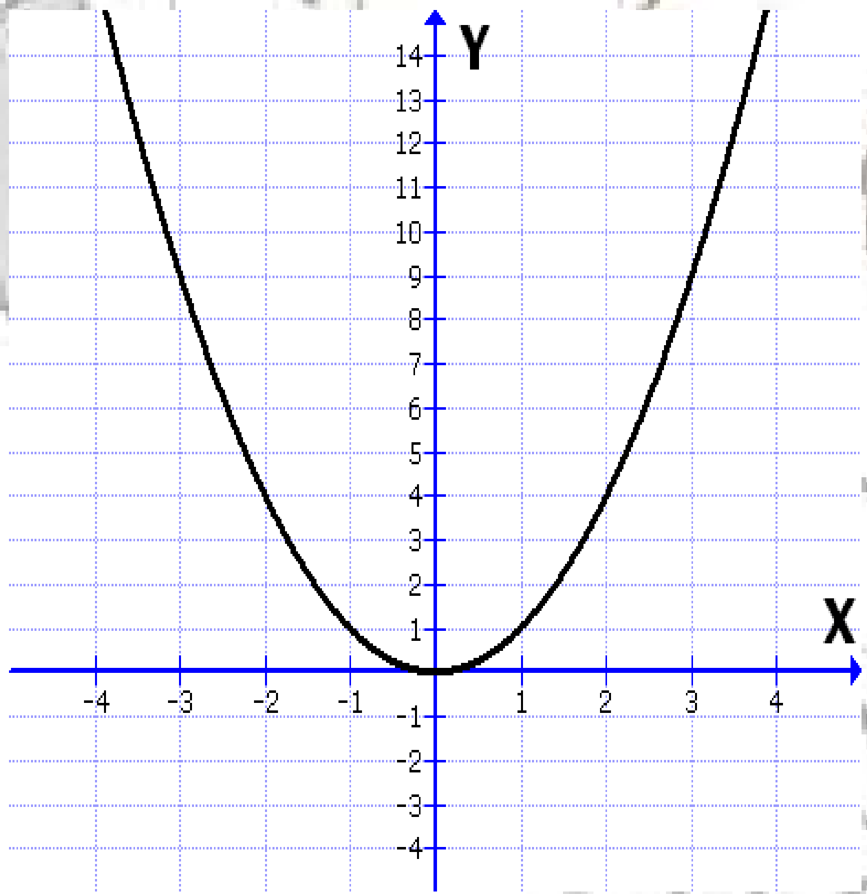


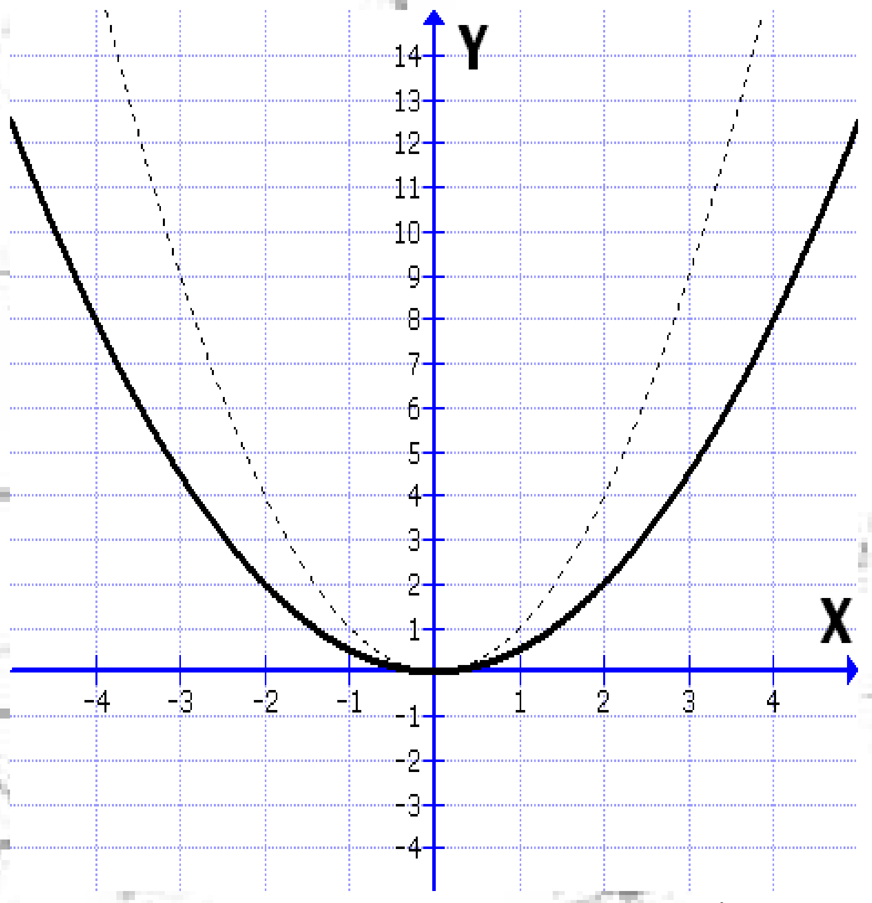
$$f(x) = x^2$$



$$f(x) = 2x^2$$

La Parábola

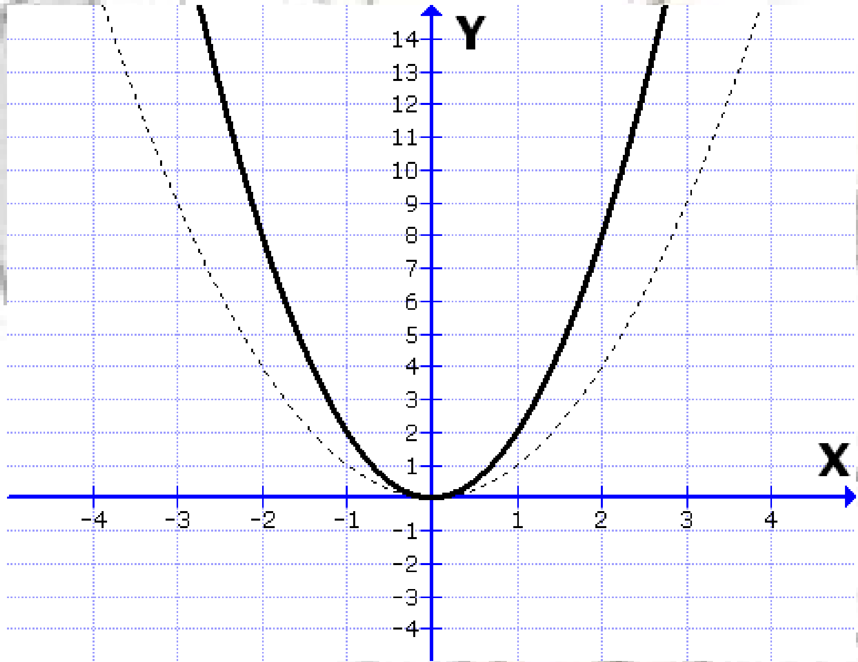


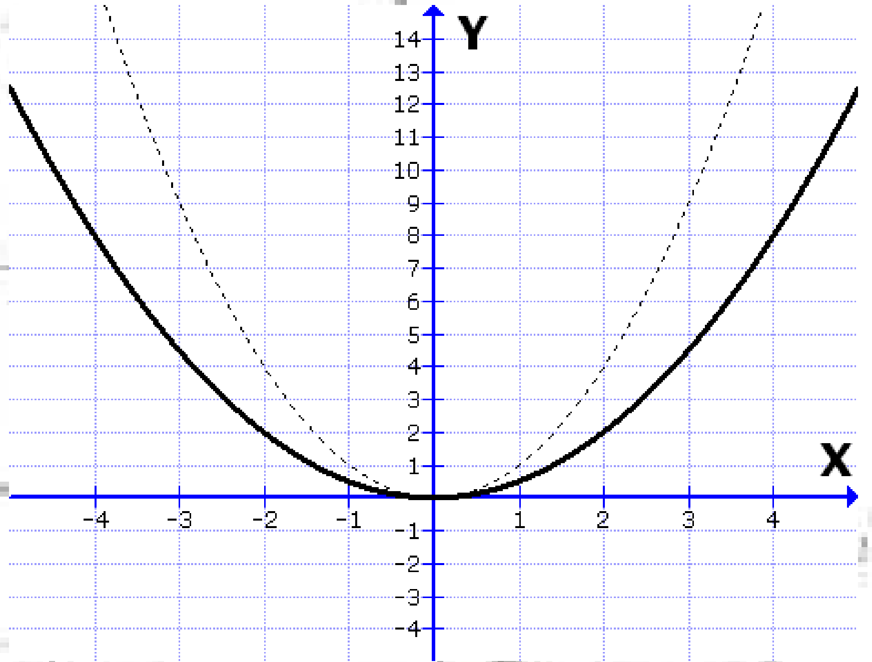


$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = x^2/2$$

La Parábola





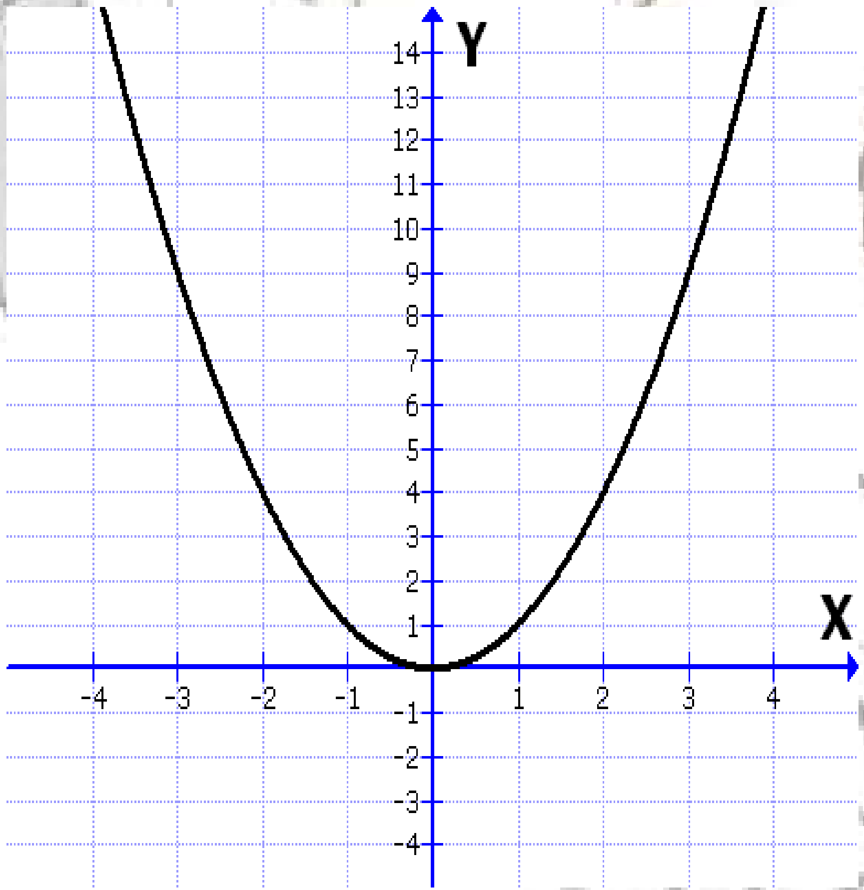
$$f(x) = 2x^2 \qquad f(x) = x^2/2$$

2ª propiedad: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

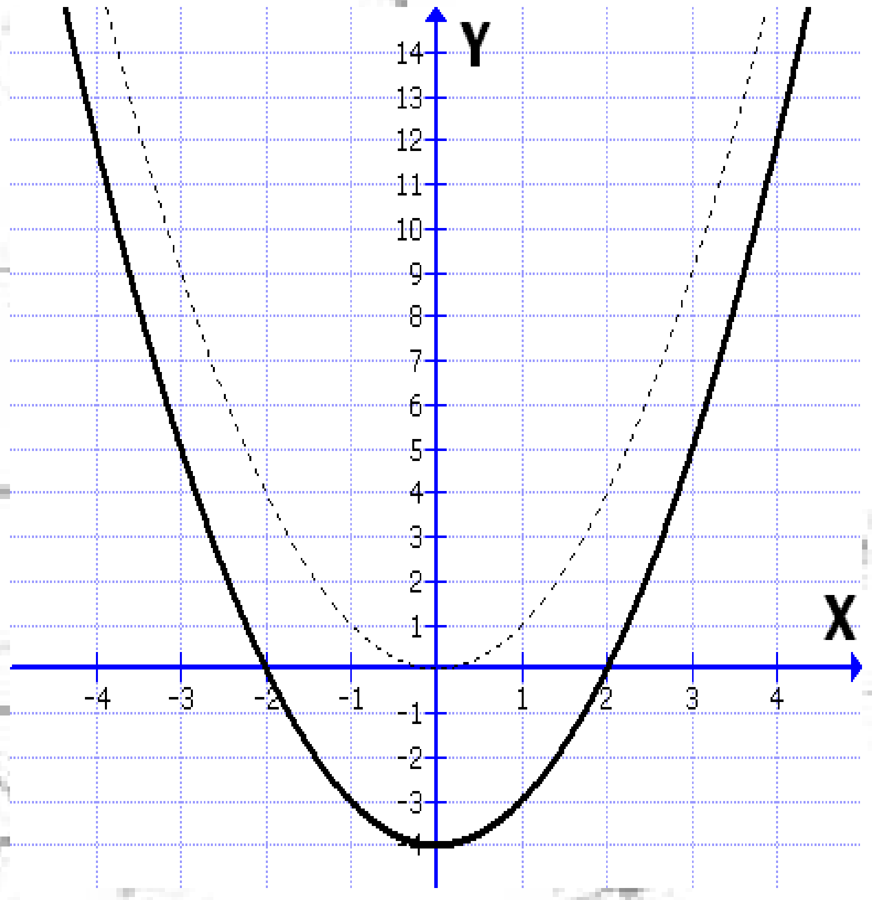
Cuanto mayor sea |a| más cerrada.

Cuanto menor sea |a| más abierta.

La Parábola

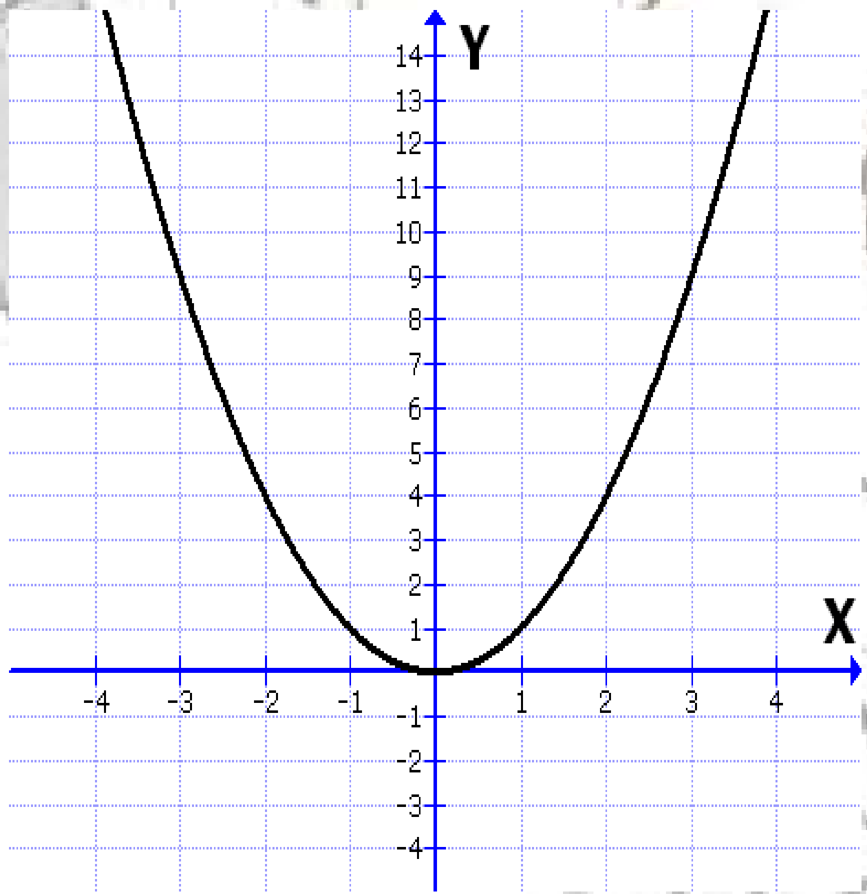


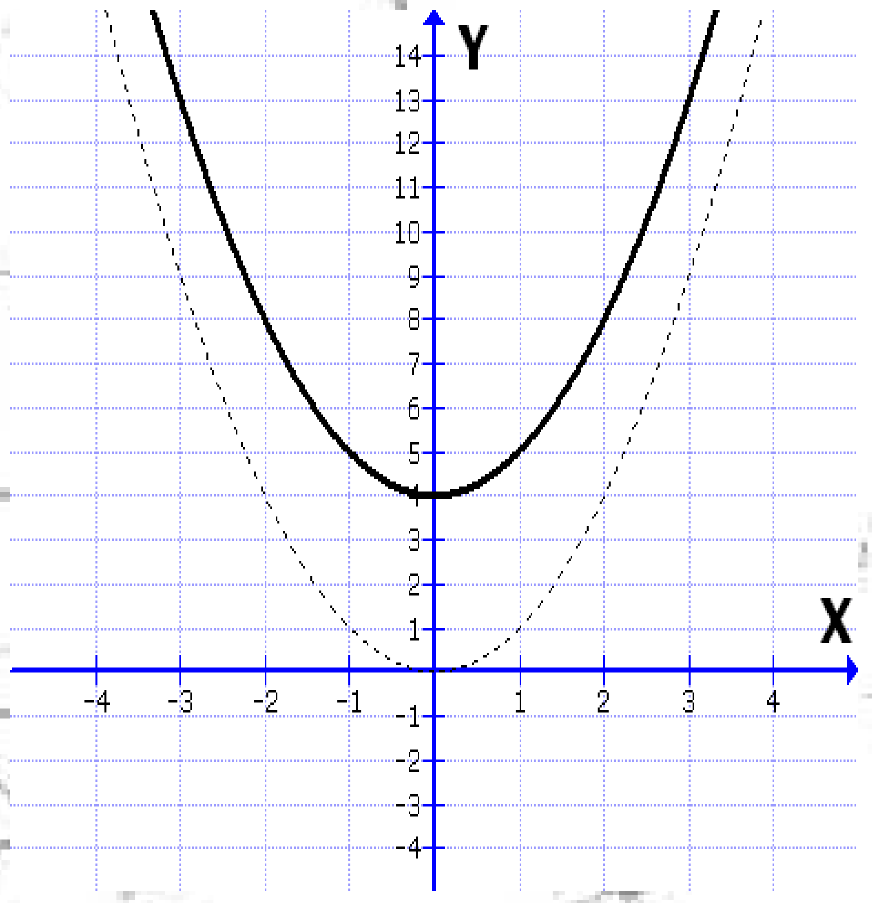
$$f(x) = x^2$$



$$f(x) = x^2 - 4$$

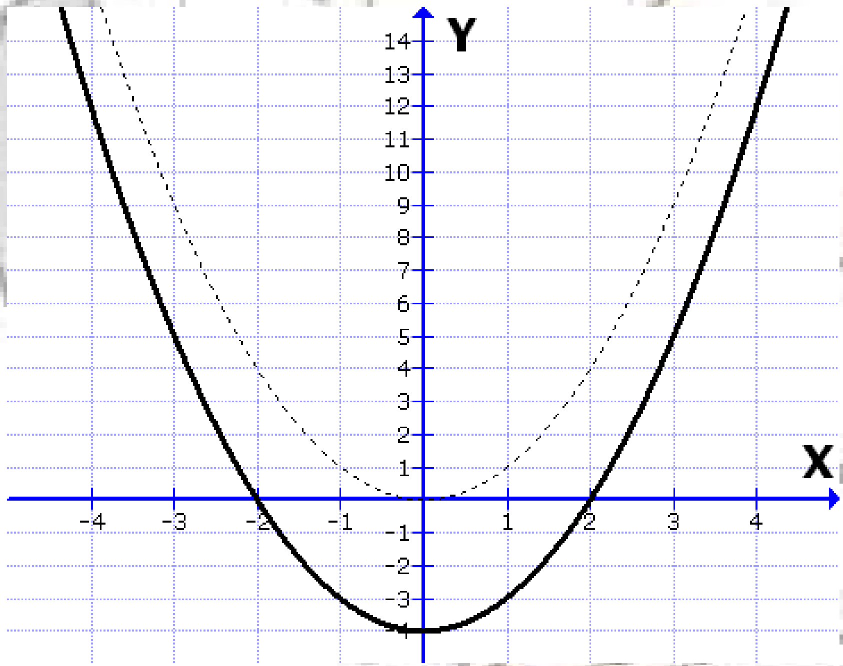
La Parábola



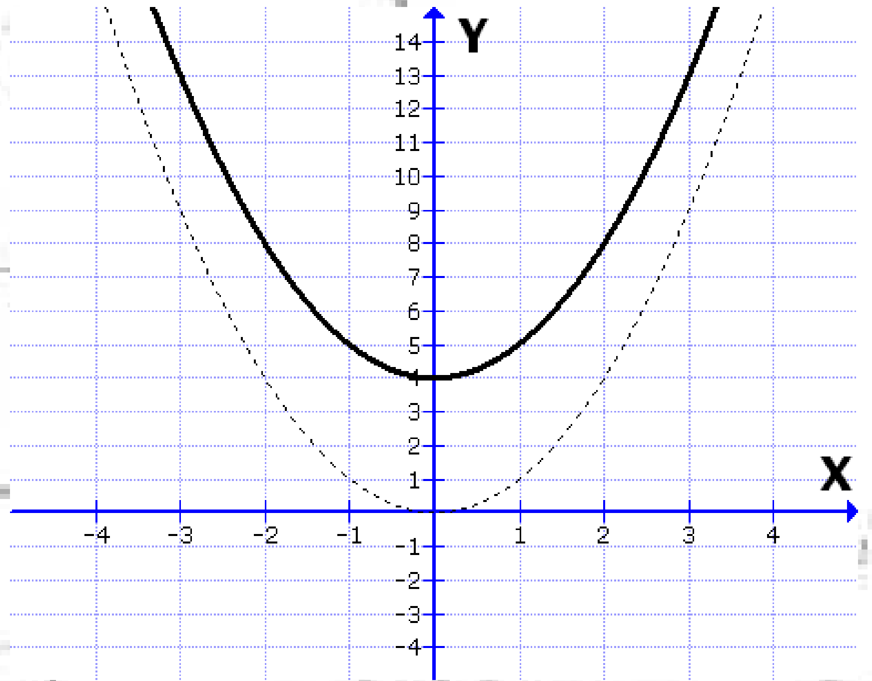


$$f(x) = x^2 \qquad f(x) = x^2 + 4$$

La Parábola



$$f(x) = x^2 - 4$$



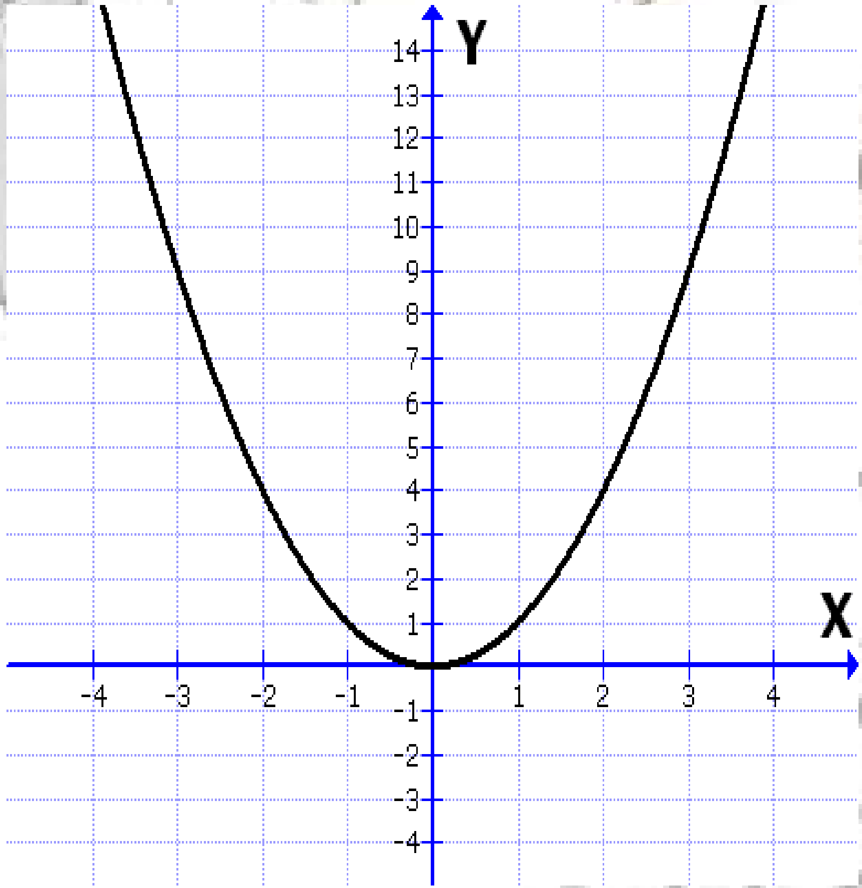
$$f(x) = x^2 + 4$$

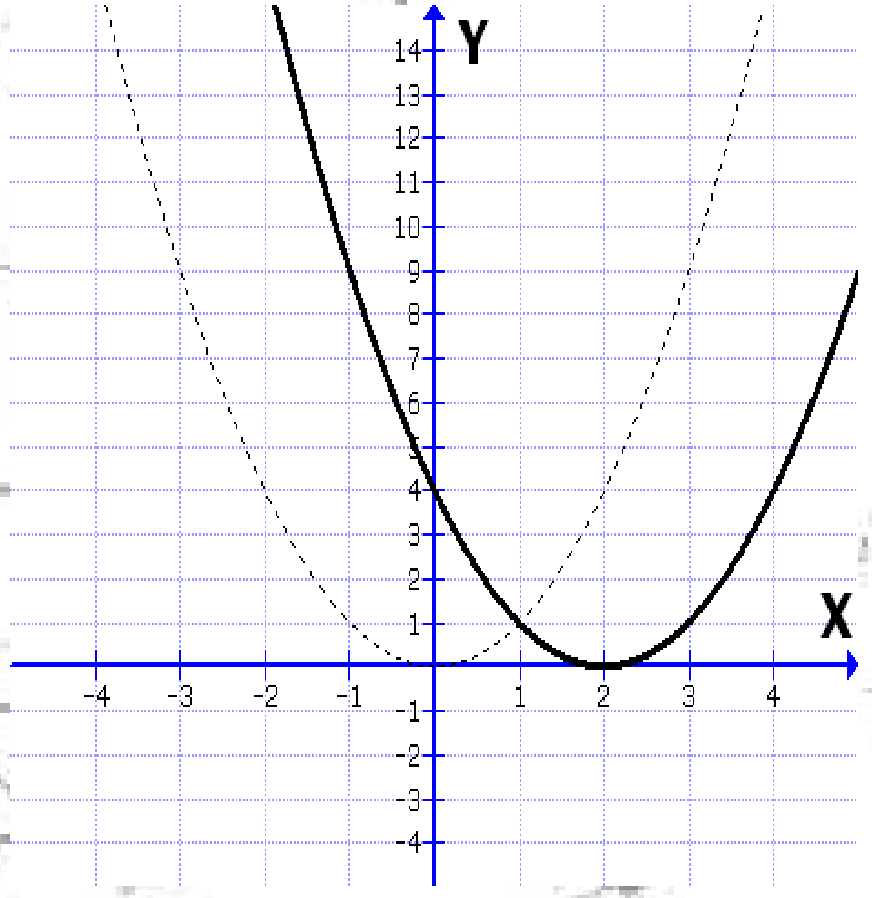
3ª propiedad: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Si c > 0 la parábola sube c unidades.

Si c < 0 la parábola baja |c| unidades.

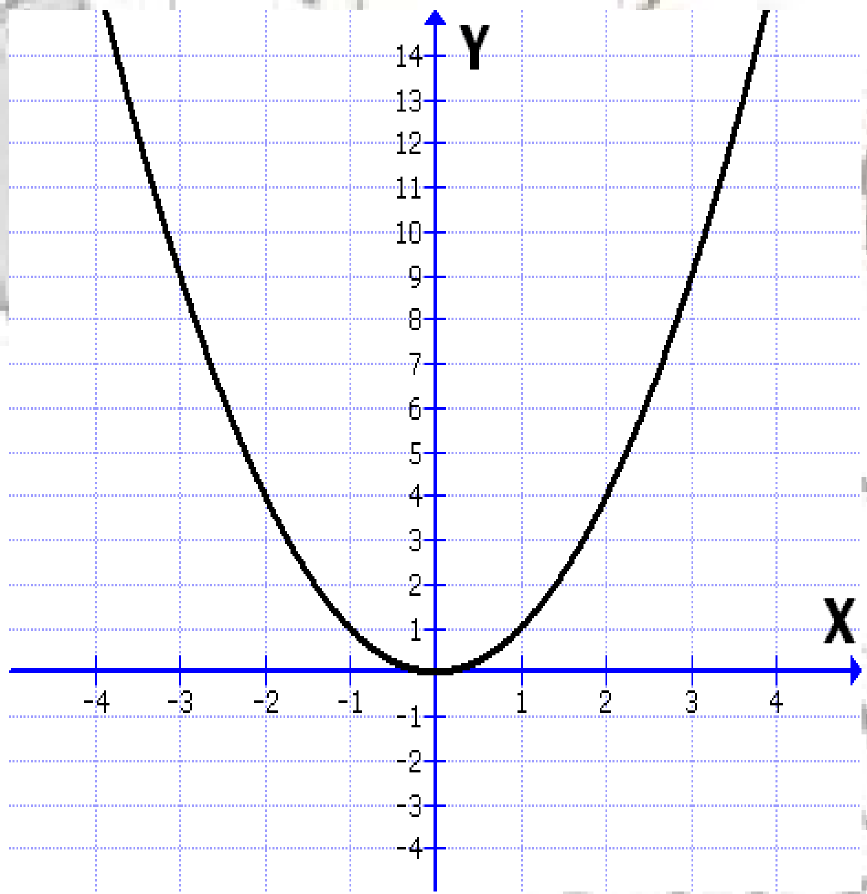
La Parábola



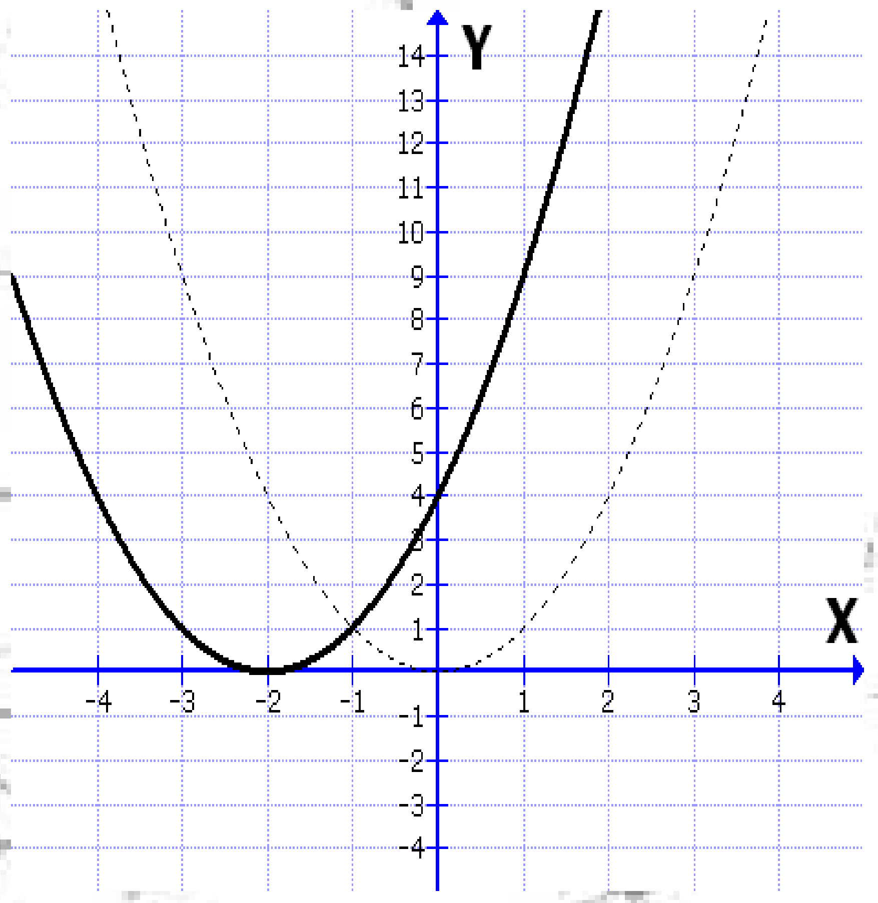


$$f(x) = x^2 \qquad f(x) = (x-2)^2$$

La Parábola

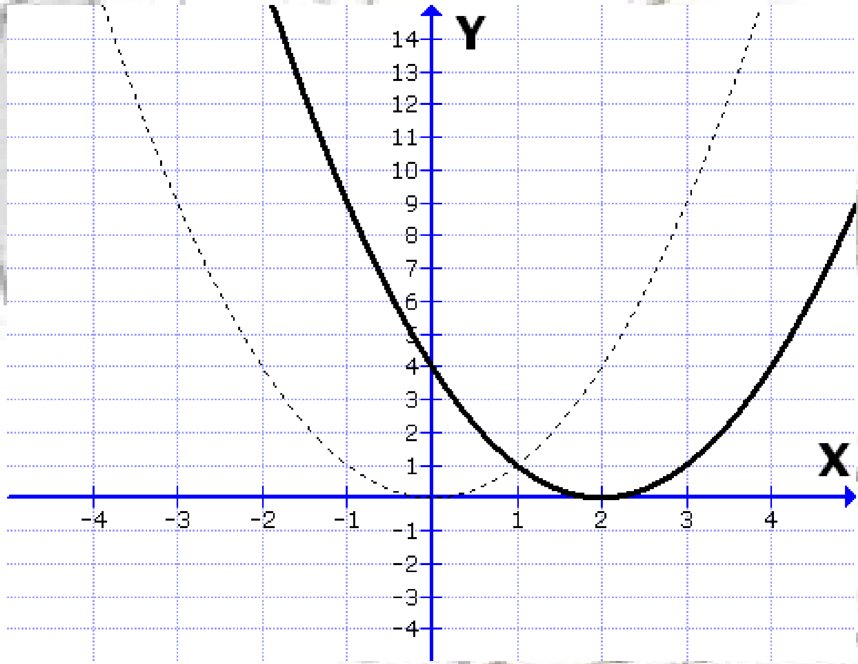


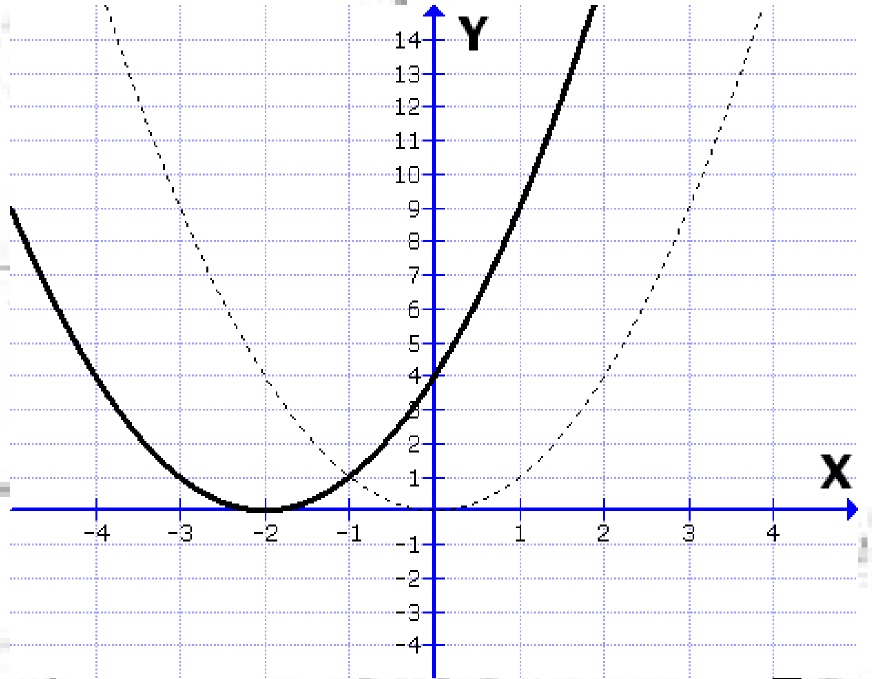
$$f(x) = x^2$$



$$f(x) = (x+2)^2$$

La Parábola





$$f(x) = (x-2)^2 \qquad f(x) = (x+2)^2$$

<u>4ª propiedad</u>: $f(x) = (x+n)^2$

Si <u>n > 0</u> la parábola se traslada a la izquierda <u>n unidades</u>.

Si <u>n < 0</u> la parábola se traslada a la derecha <u>n unidades</u>.

La Parábola

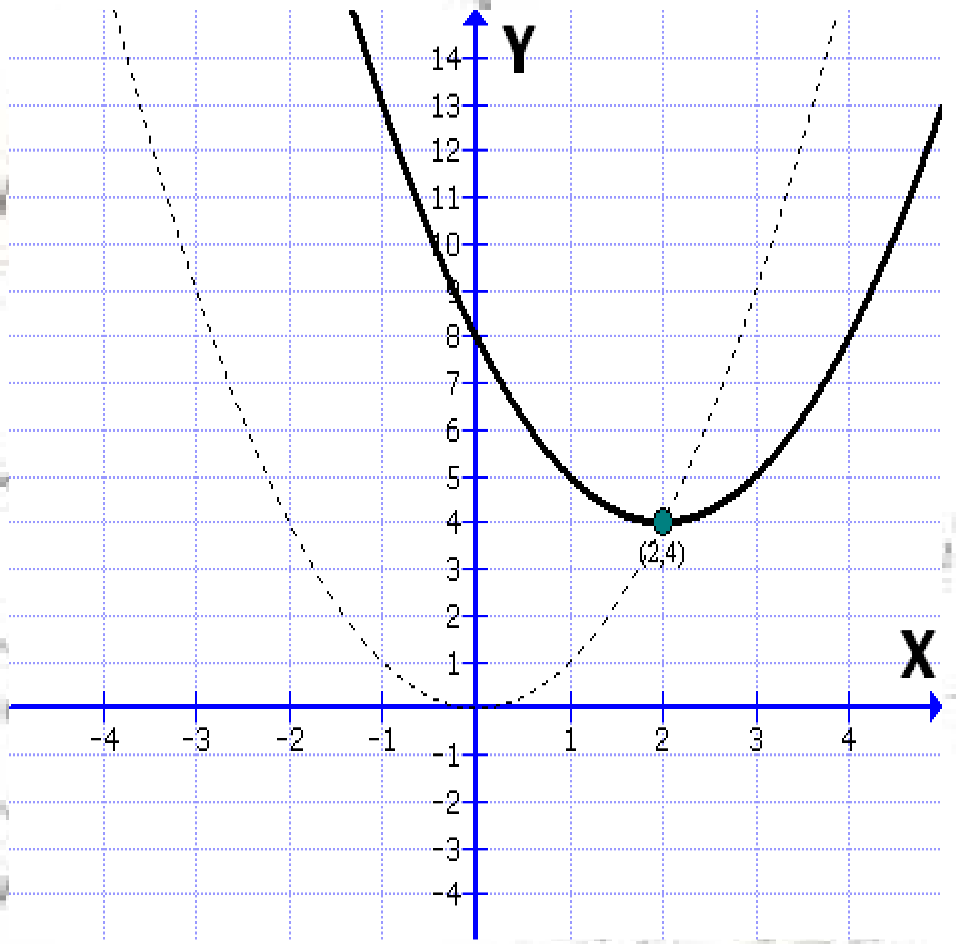
Teniendo en cuenta estas dos últimas propiedades, podríamos dibujar cualquier parábola dada por la expresión

$$f(x) = a \cdot (x+n)^2 + c$$

1º Dibujamos la función mediante una tabla de valores...

$$f(x) = a \cdot x^2$$

2º Trasladamos la parábola en función de los valores de n y c.

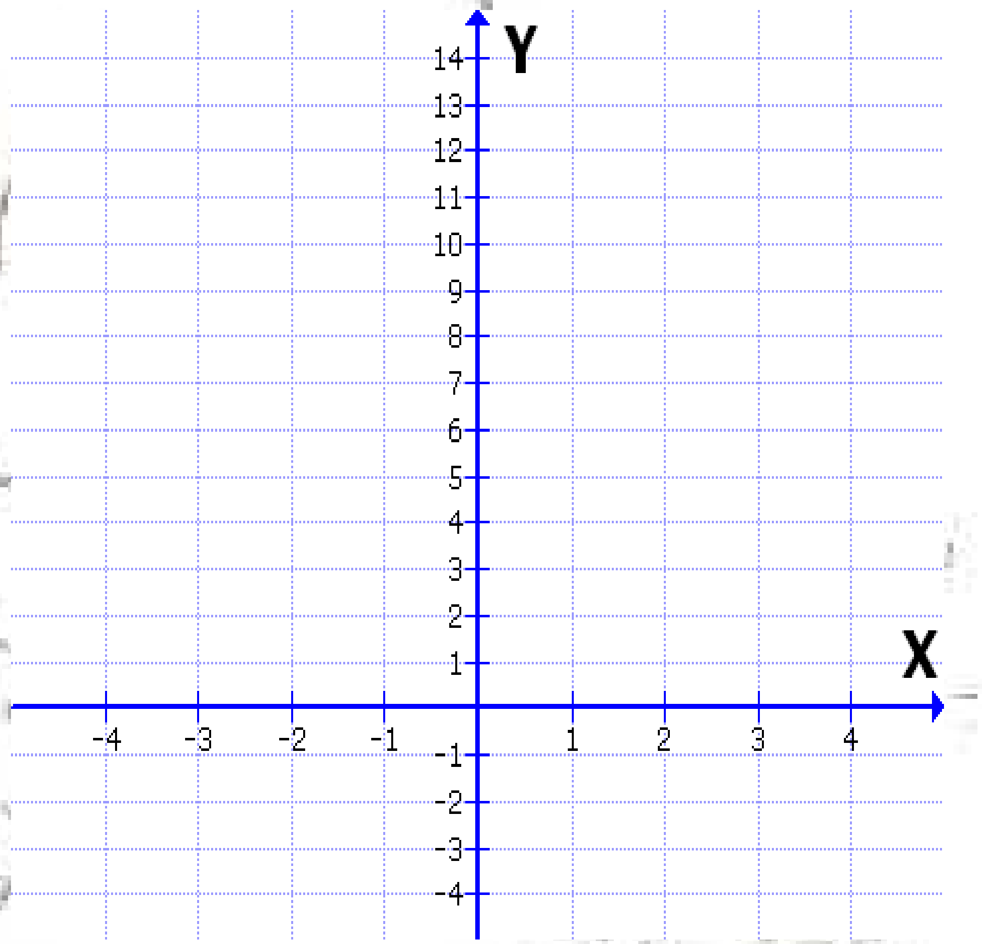


$$f(x) = (x-2)^2 + 4$$

La Parábola

Veamos otro modo más general de dibujar una parábola dada por la fórmula...

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



Utilizaremos este ejemplo $f(x) = x^2 + 2x - 3$

La Parábola

1º CÁLCULO DEL VÉRTICE.

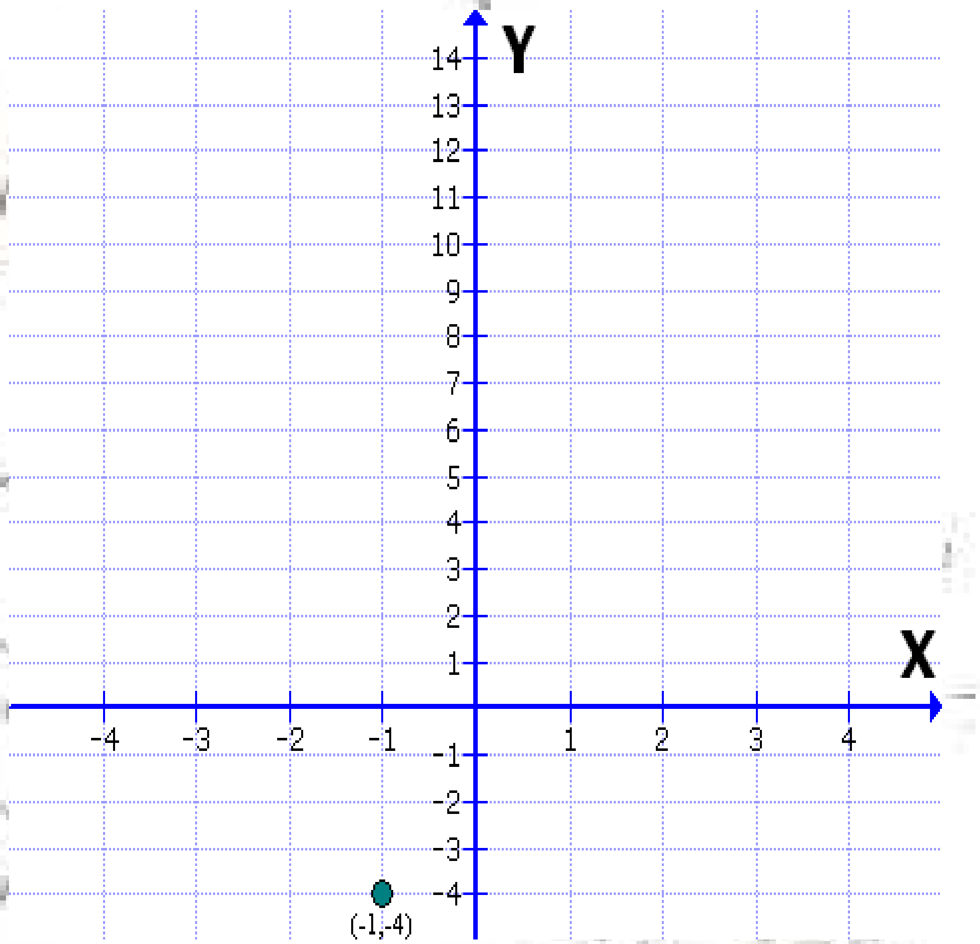
La coordenada x del vértice, al ser el punto medio de cualquier dos puntos simétricos, incluidos los cortes con el eje horizontal, se puede demostrar que es...

$$V_x = {-b}/{2a}$$

La coordenada y del vértice se obtiene al calcular...

$$V_y = f(V_x)$$

$$V = \left({-b}/{2a}, f(V_x)\right) = \underline{(-1,-4)}$$



$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

La Parábola

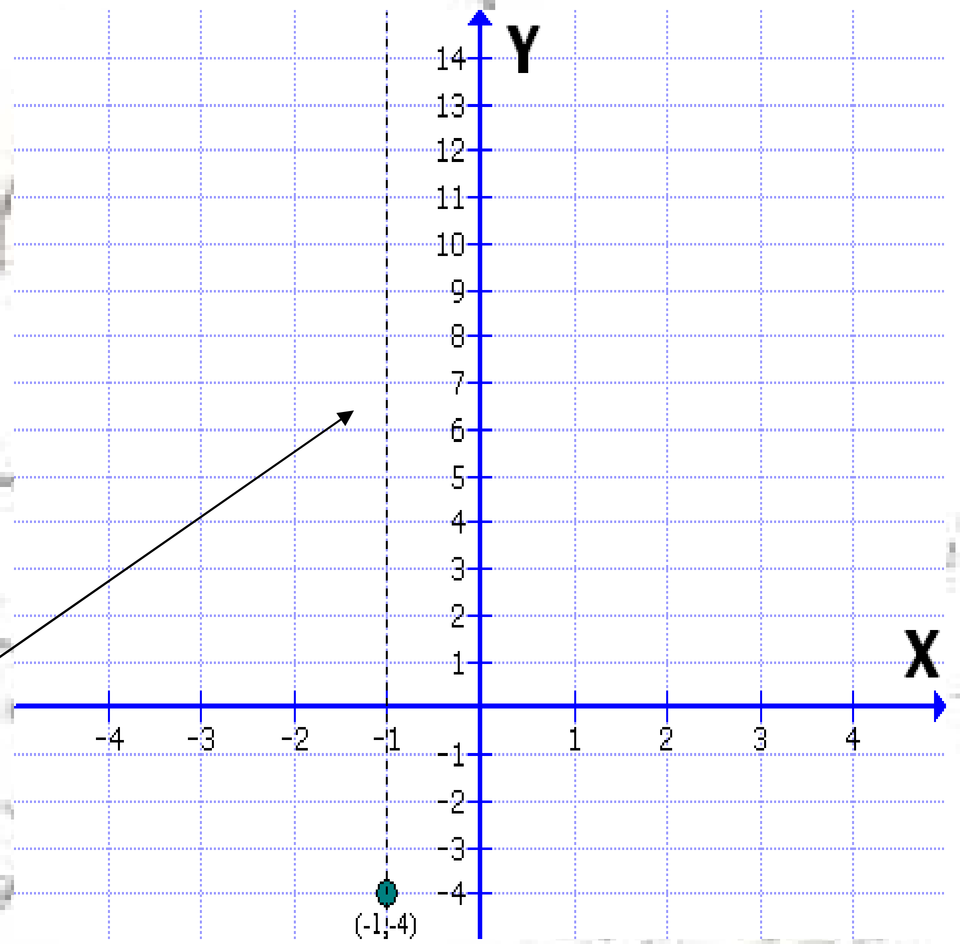
2º **EJE DE SIMETRÍA.**

Aunque no pertenece a la parábola, sí nos ayudará a la hora de representarla.

El eje de simetría de la parábola es la recta vertical...

$$x = V_x$$

$$x = -1$$



$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

La Parábola

3º PUNTOS CORTE CON EJES.

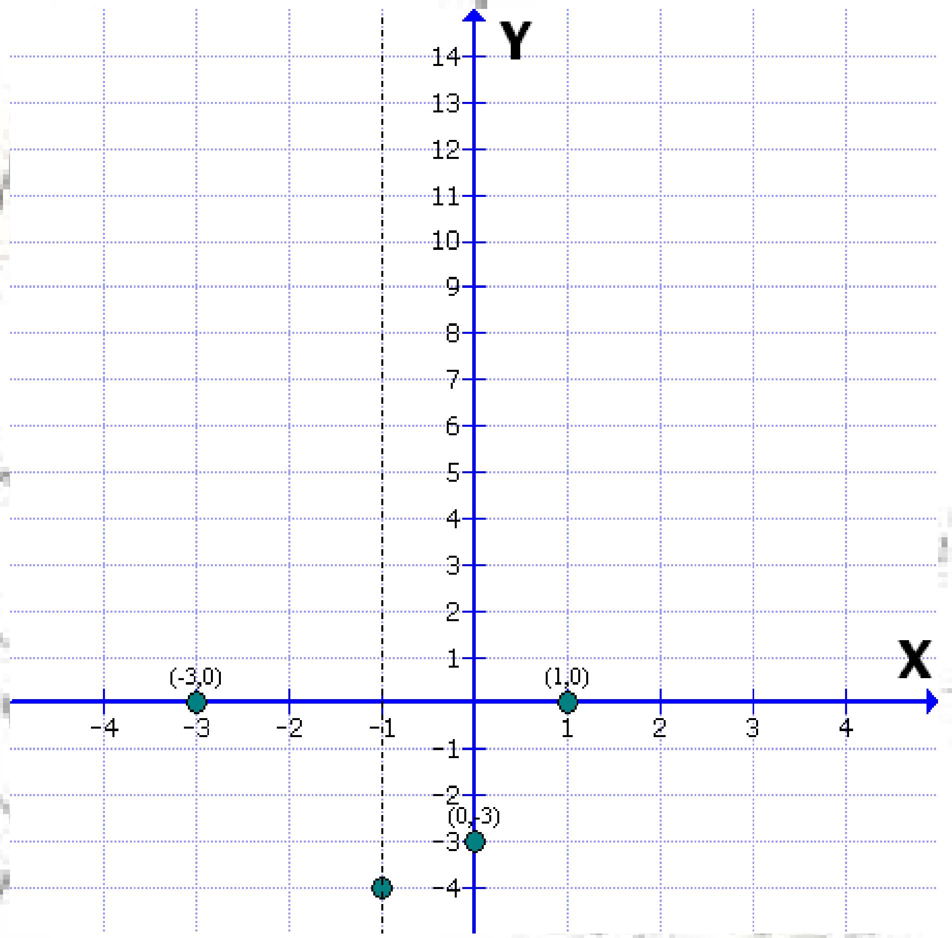
Eje vertical OY

$$\left(0, f(0)\right)$$

Eje horizontal OX

$$\left(f^{-1}(0), 0\right)$$

$$(0,-3),(1,0),(-3,0)$$



$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

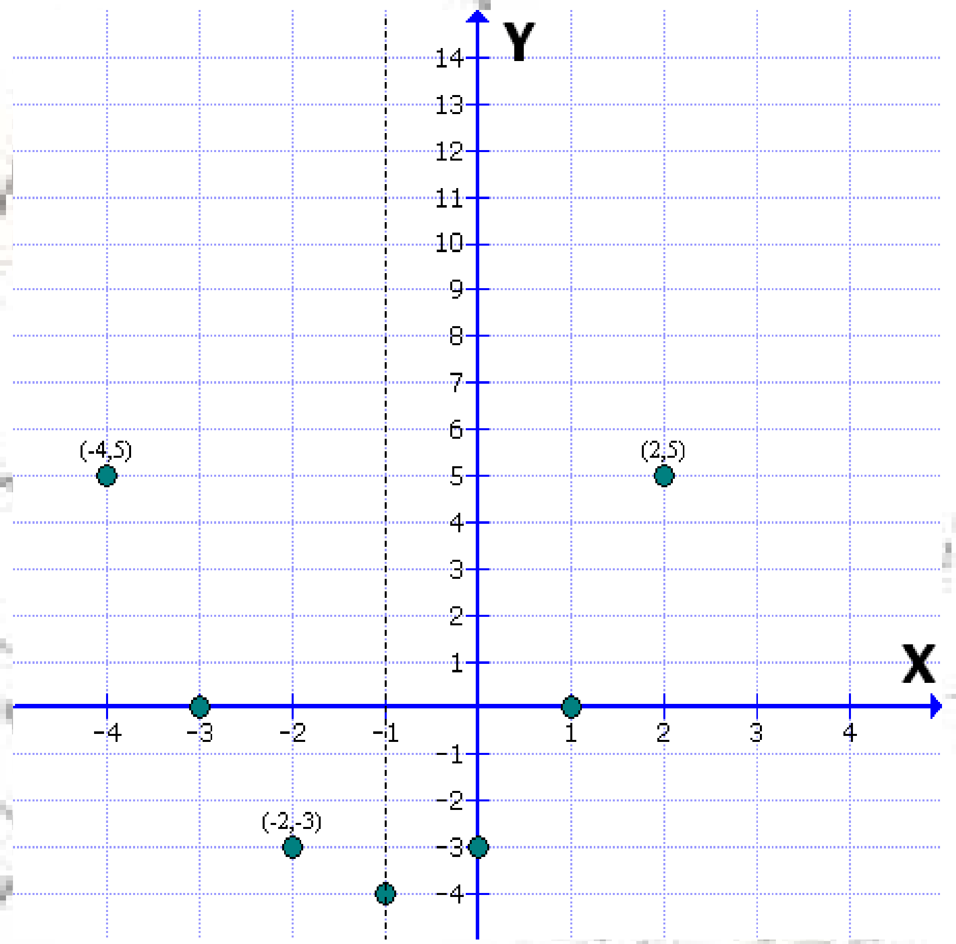
La Parábola

4º TABLA DE VALORES.

X	Y
-2	-3
2	5
-4	5

Aprovechemos el eje de simetría para ahorrarnos cálculos.

En total habrá que sacar al menos 7 puntos de la parábola.



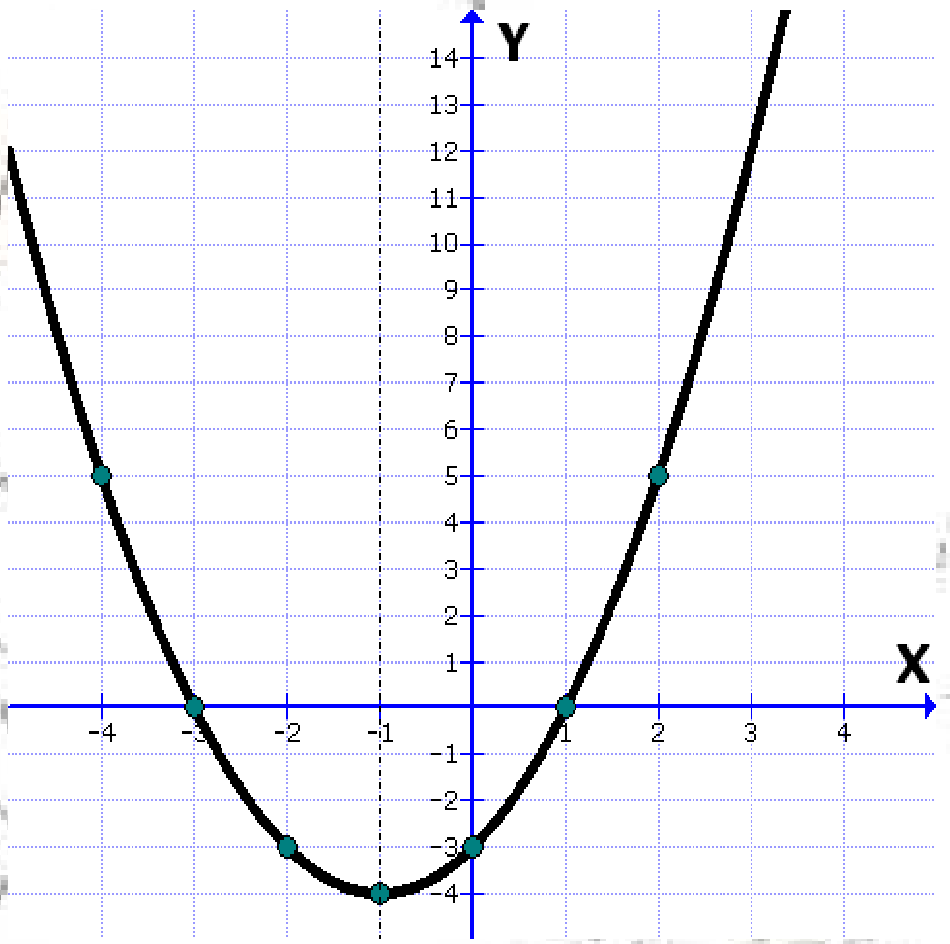
$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

La Parábola

5º TRAZAMOS LA PARÁBOLA.

RESUMEN

1º Cálculo del Vértice.
2º Eje de Simetría.
3º Corte con los Ejes.
4º Tabla de Valores.
5º Trazado de la Curva.



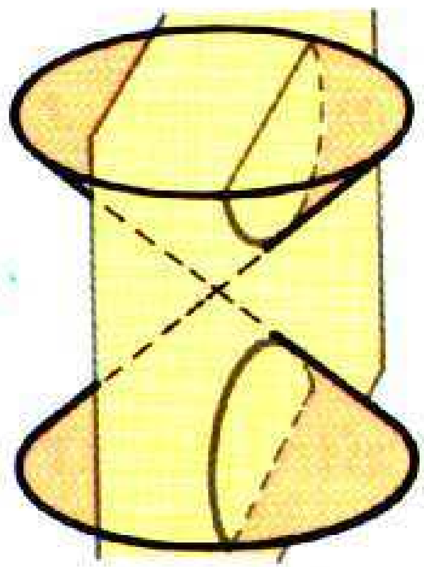
$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

La Hipérbola

Todas las funciones que tienen por expresión algebraica el siguiente quebrado algebraico, tienen por representación gráfica una hipérbola.

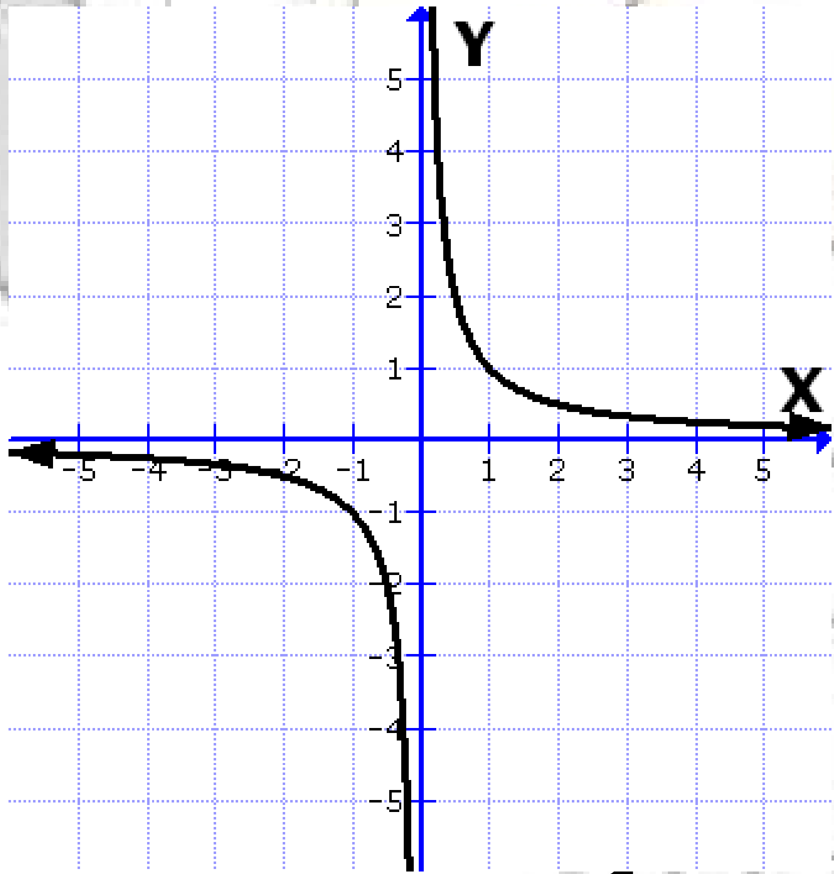
$$f(x) = \frac{a}{x+b} + c$$

Al igual que las funciones parabólicas, seguiremos una serie de pasos a la hora de representar la gráfica de dicha función.

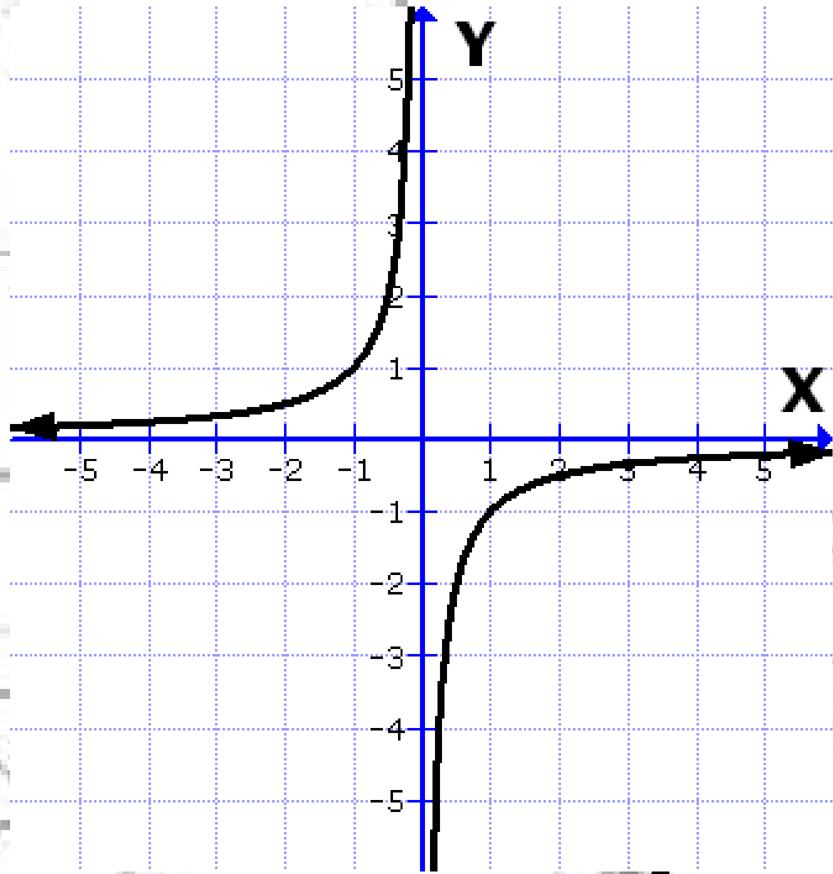


Antes de eso veamos la representación gráfica de varias funciones hiperbólicas.

La Hipérbola

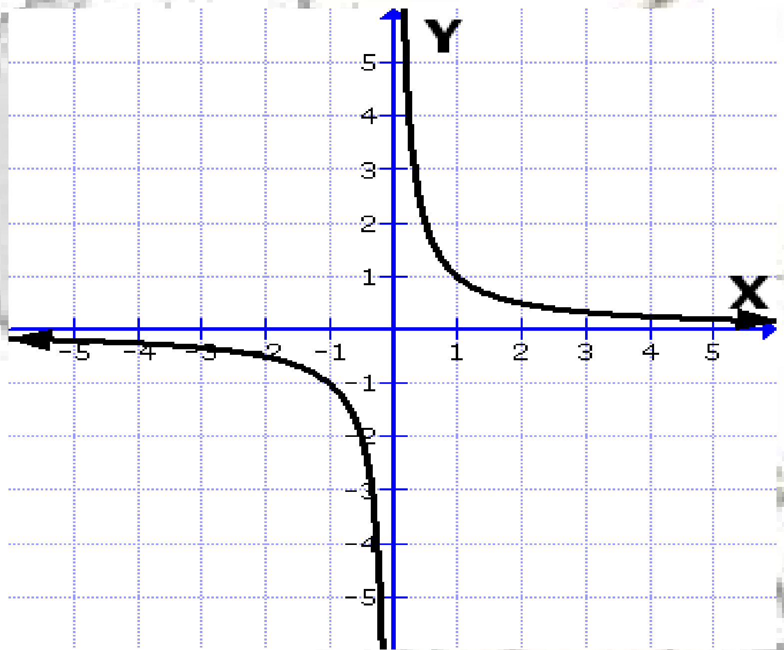


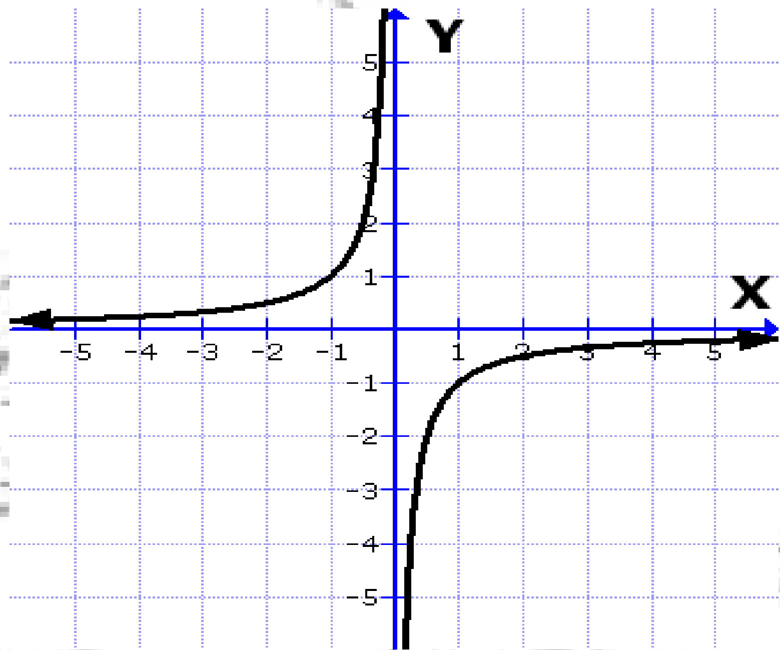
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = \frac{-1}{x}$$

La Hipérbola





$$f(x) = \frac{1}{x}$$

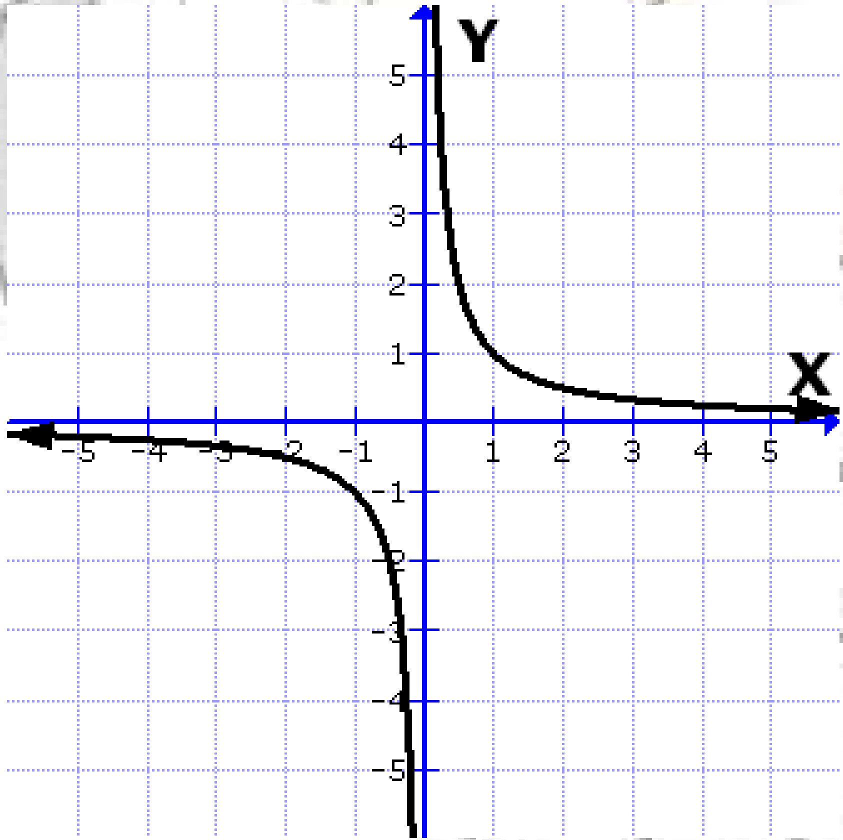
$$f(x) = \frac{-1}{x}$$

<u>1ª propiedad</u>:

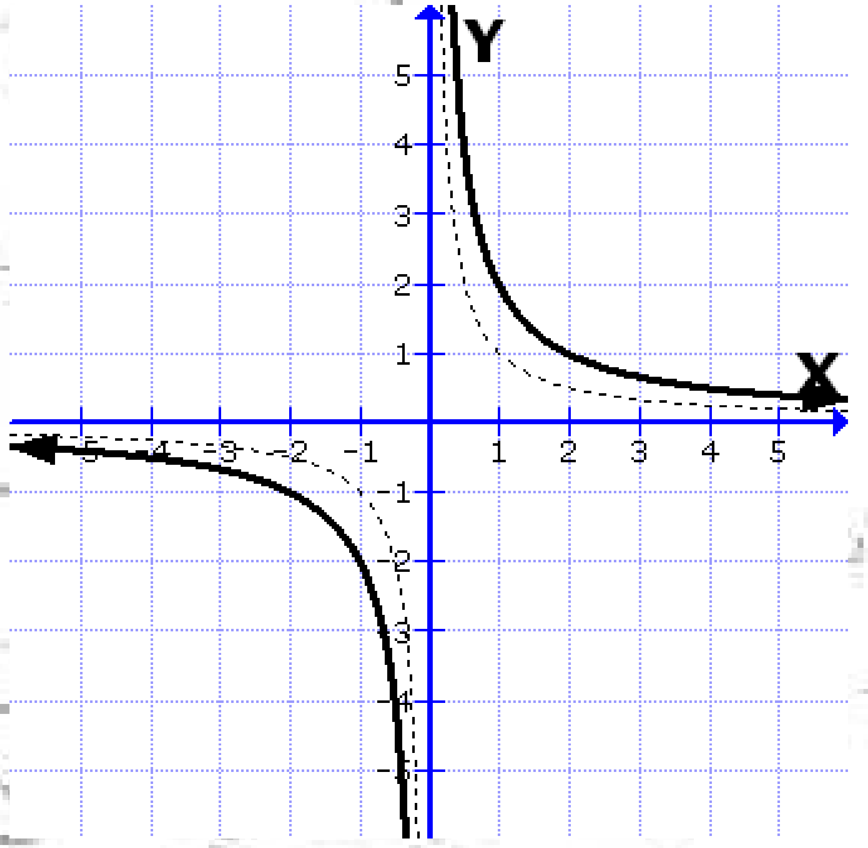
Si <u>a > 0</u> la hipérbola será <u>decreciente</u>.

Si <u>a < 0</u> la hipérbola será <u>creciente</u>.

La Hipérbola

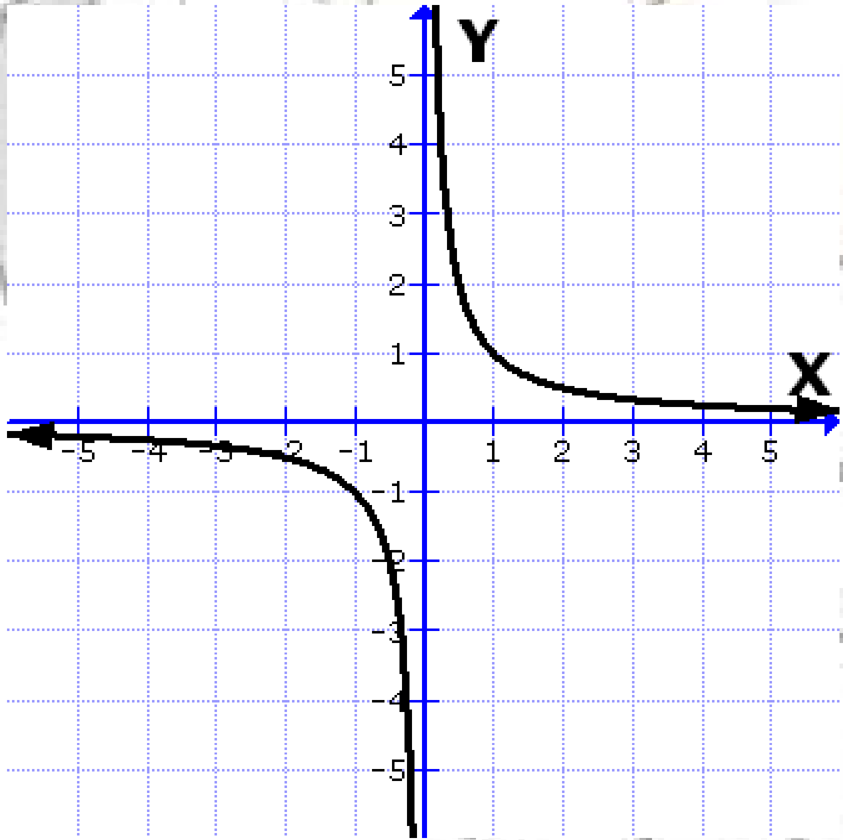


$$f(x) = \frac{1}{x}$$

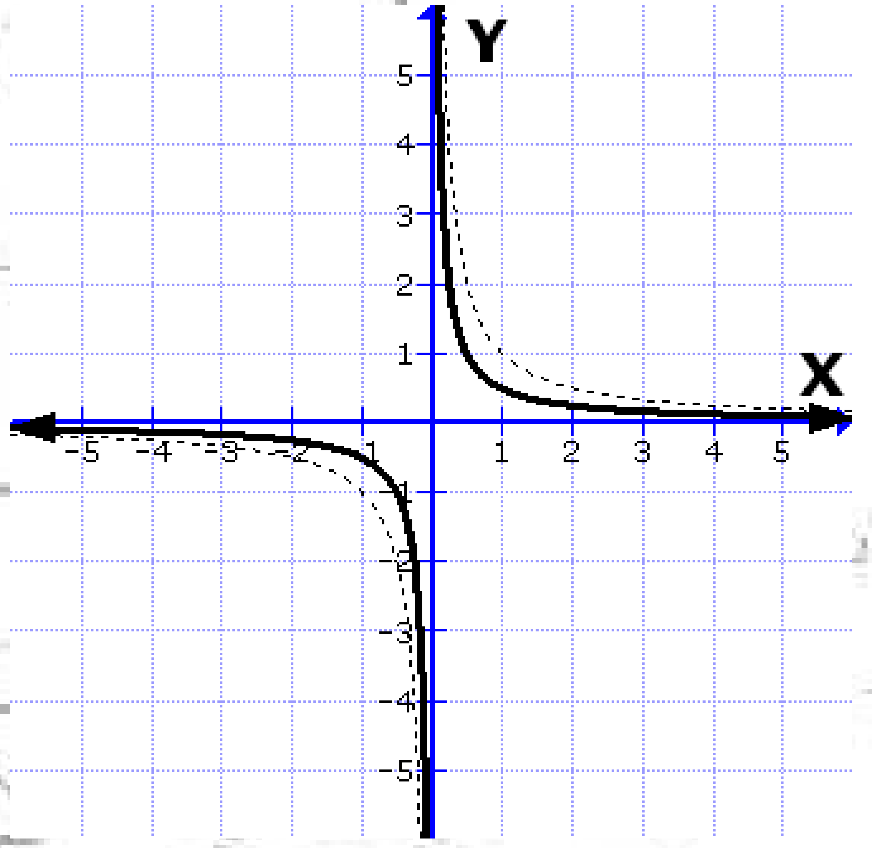


$$f(x) = \frac{2}{x}$$

La Hipérbola

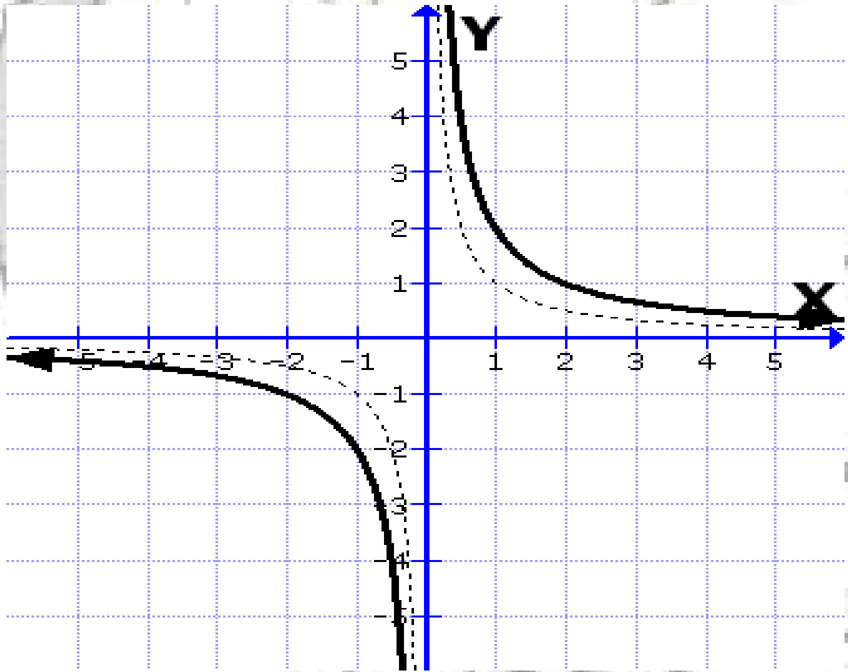


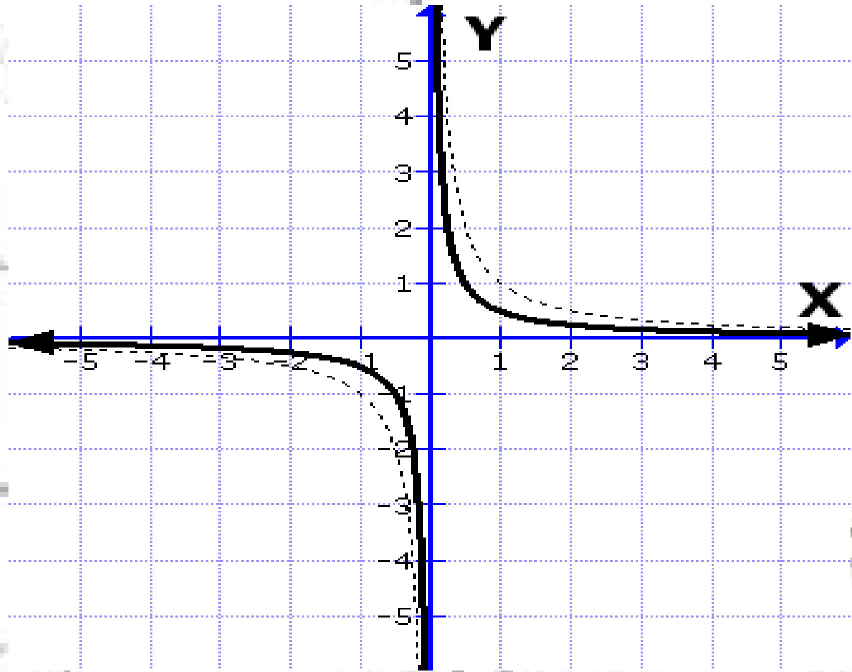
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = \frac{1}{2x}$$

La Hipérbola





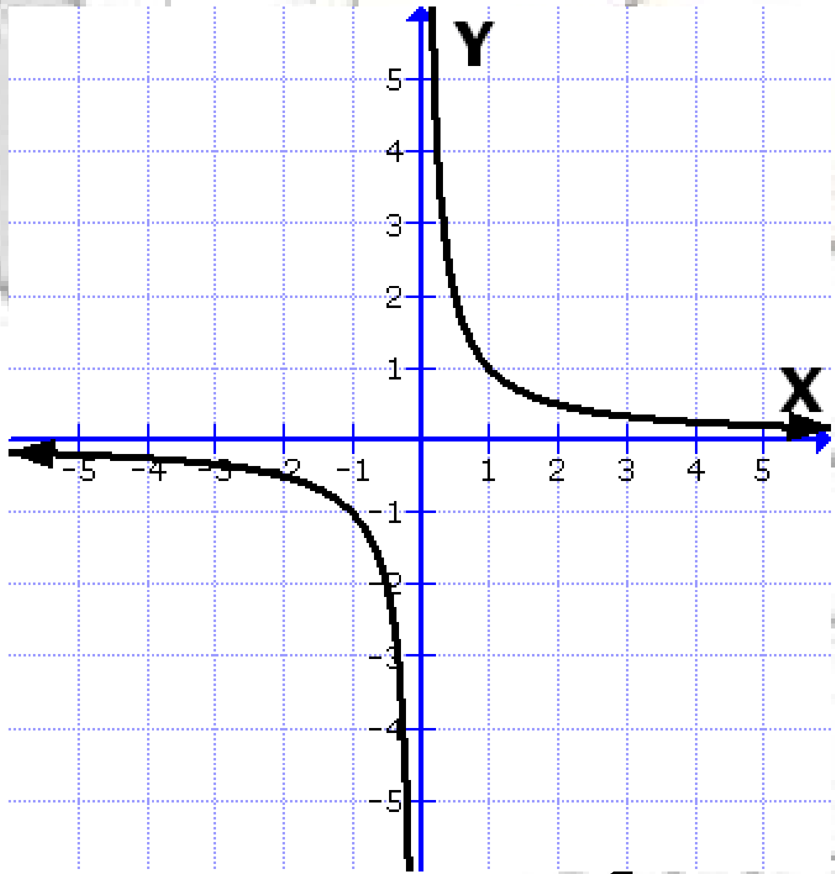
$$f(x) = \frac{2}{x} \qquad f(x) = \frac{1}{2x}$$

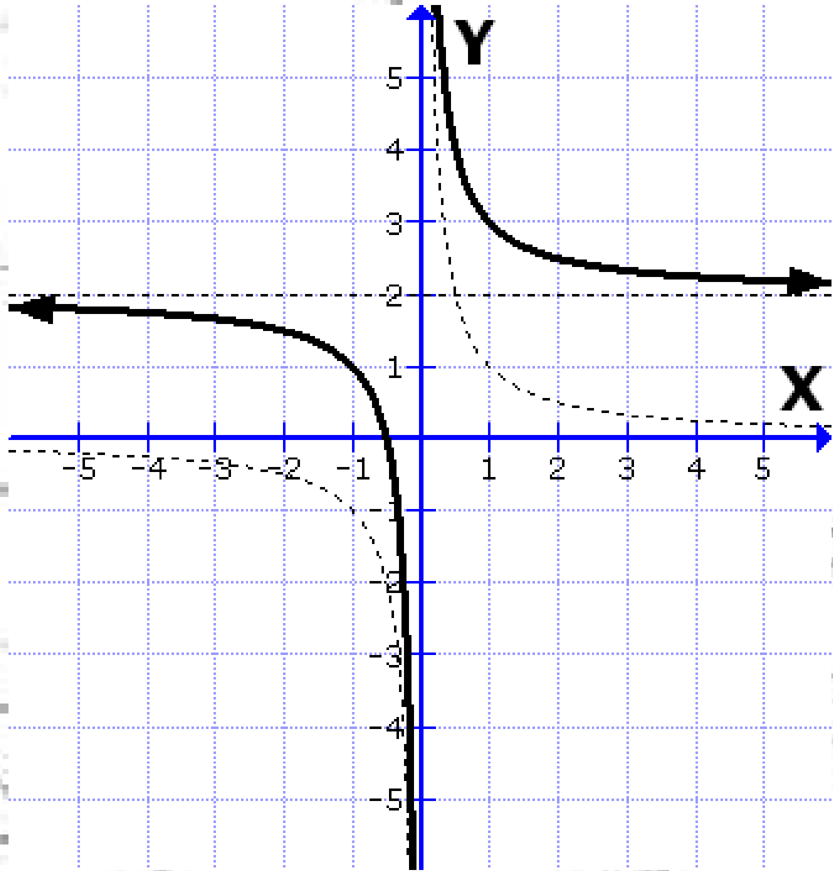
2ª propiedad:

Cuanto mayor sea |a| más suave.

Cuanto menor sea |a| menos suave.

La Hipérbola

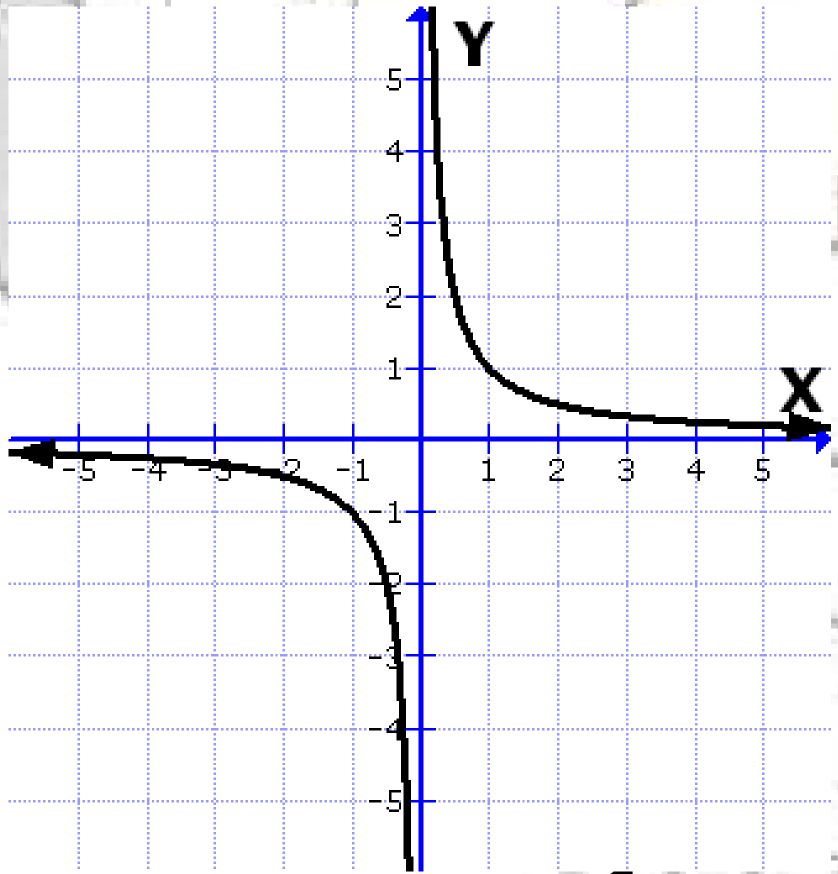


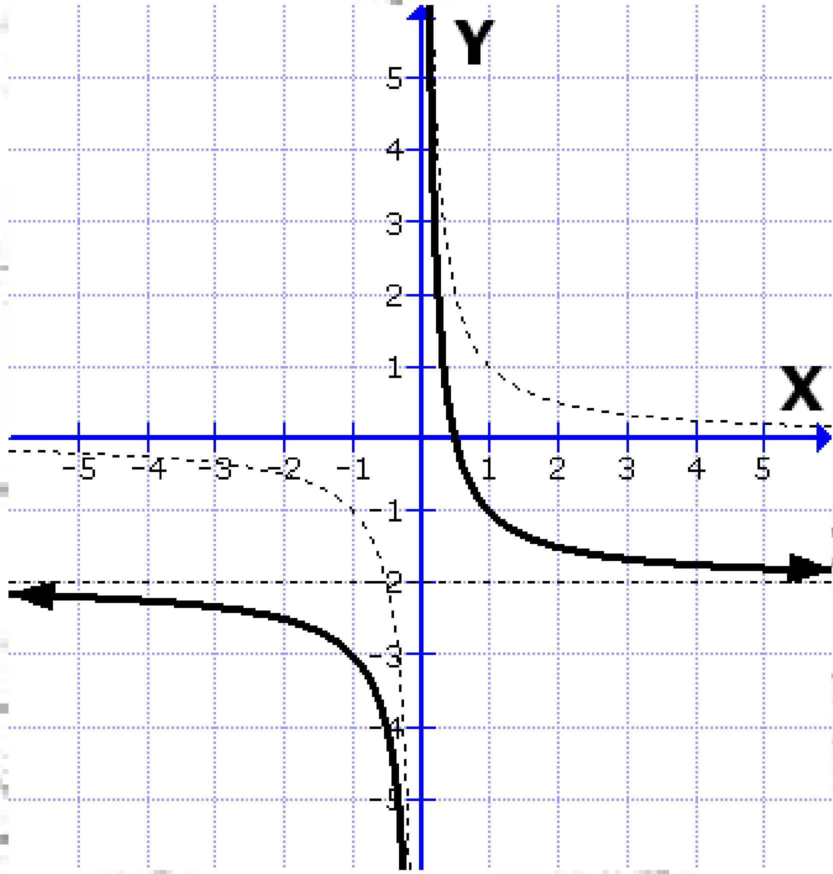


$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2$$

La Hipérbola

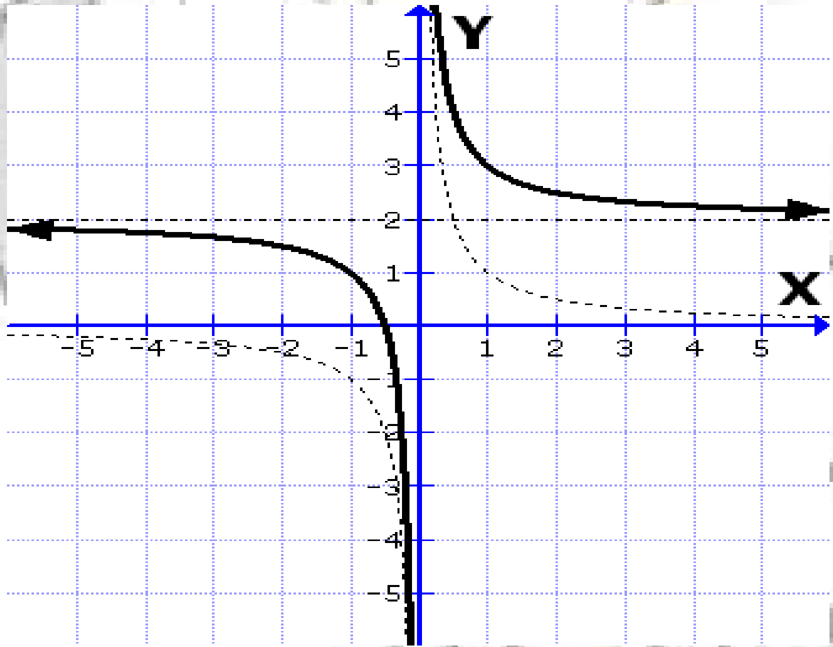


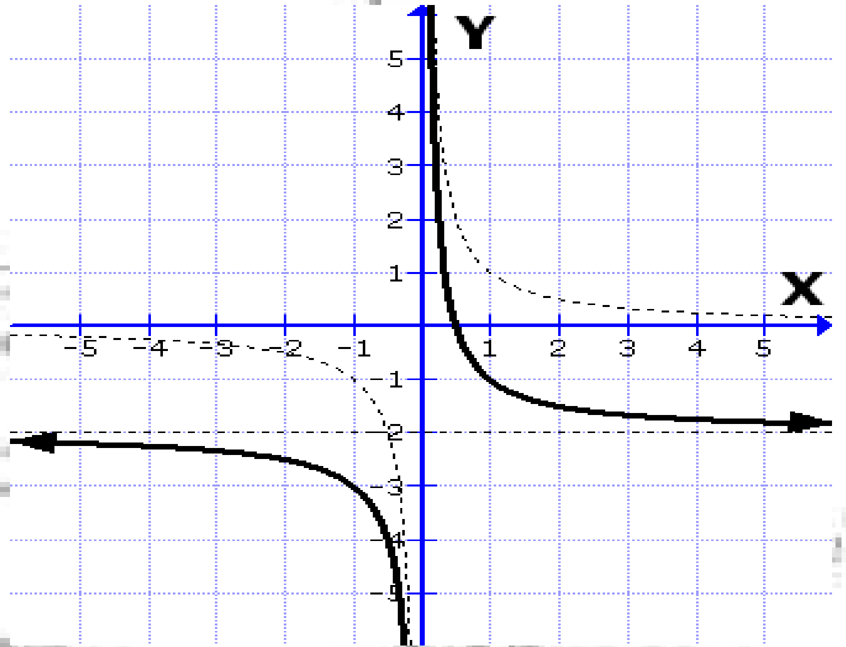


$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - 2$$

La Hipérbola





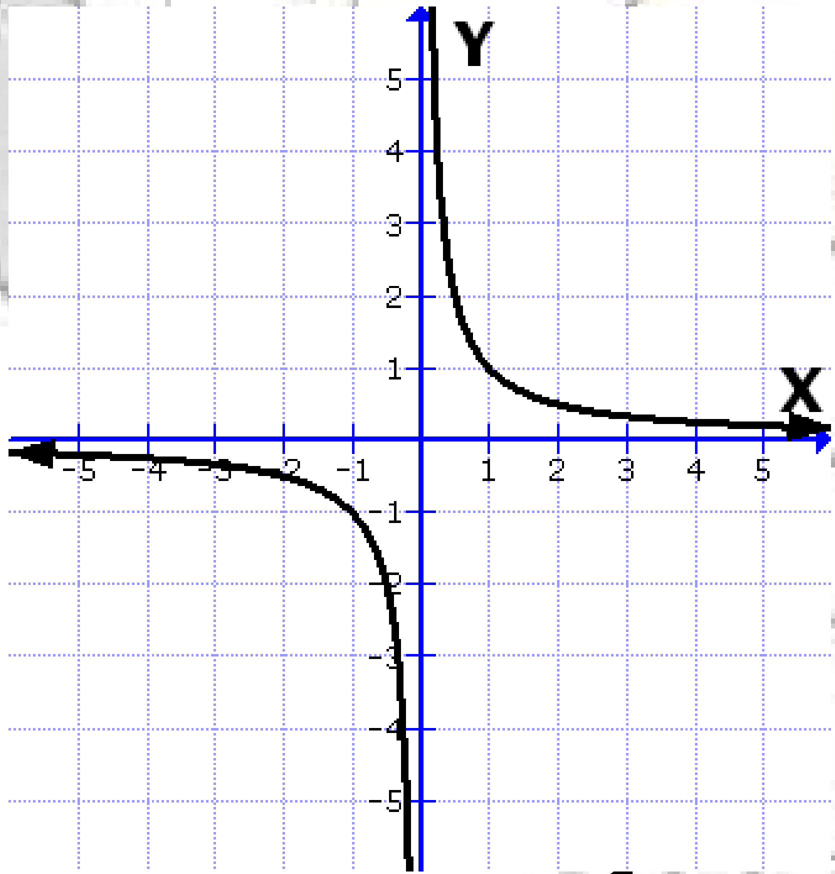
$$f(x) = \frac{1}{x} + 2 \qquad\qquad f(x) = \frac{1}{x} - 2$$

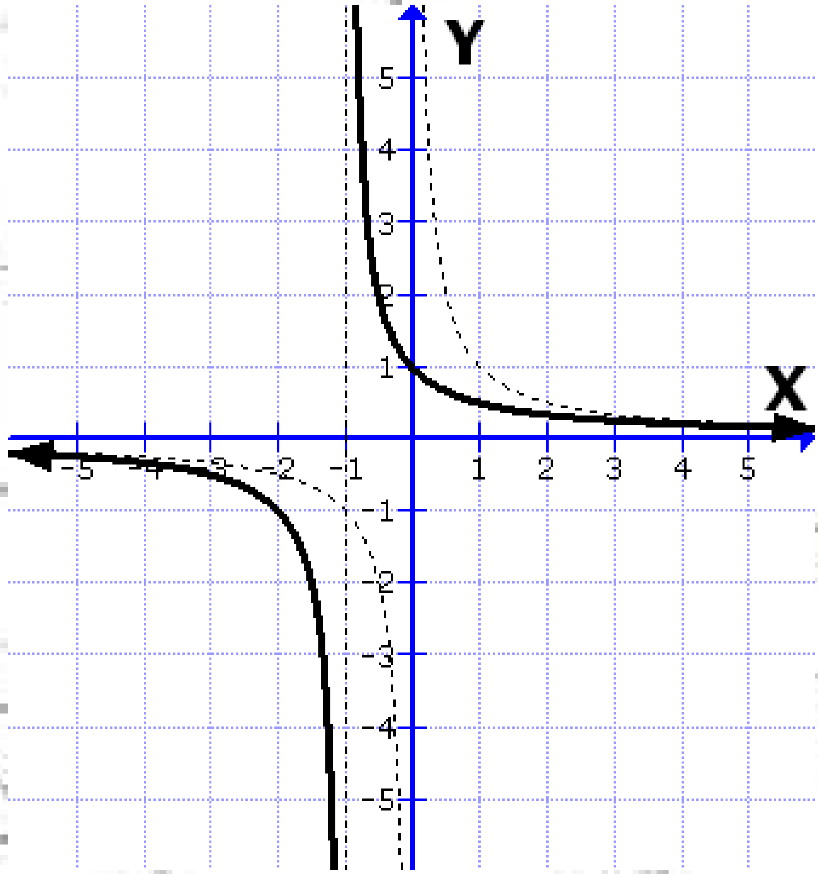
3ª propiedad:

Si c > 0 la hipérbola sube c unidades.

Si c < 0 la hipérbola baja |c| unidades.

La Hipérbola

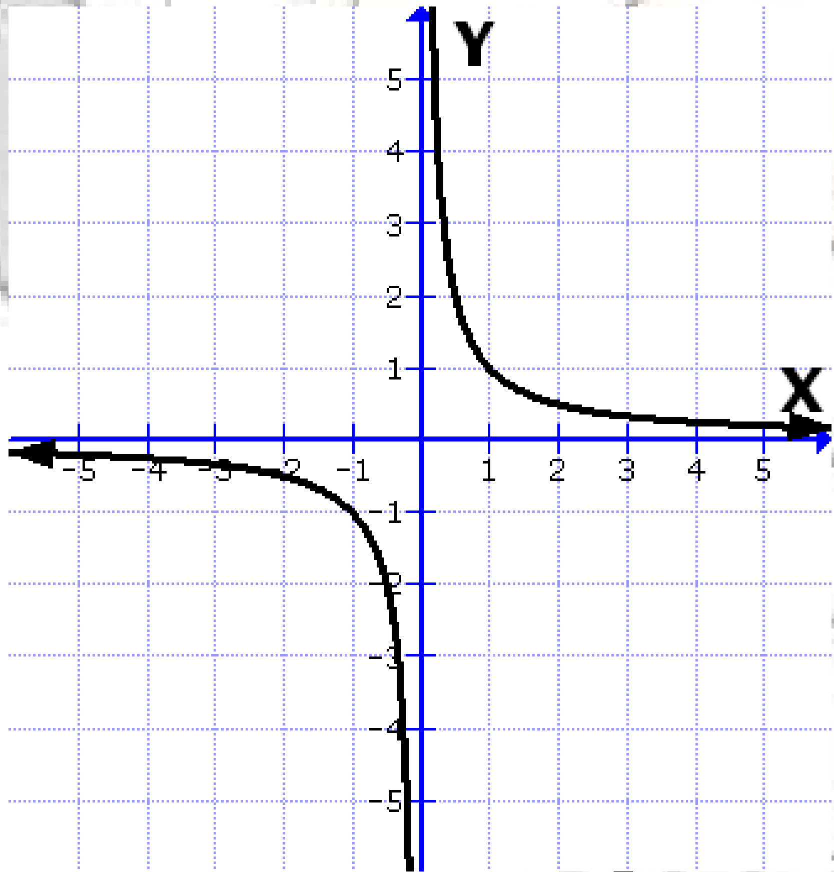




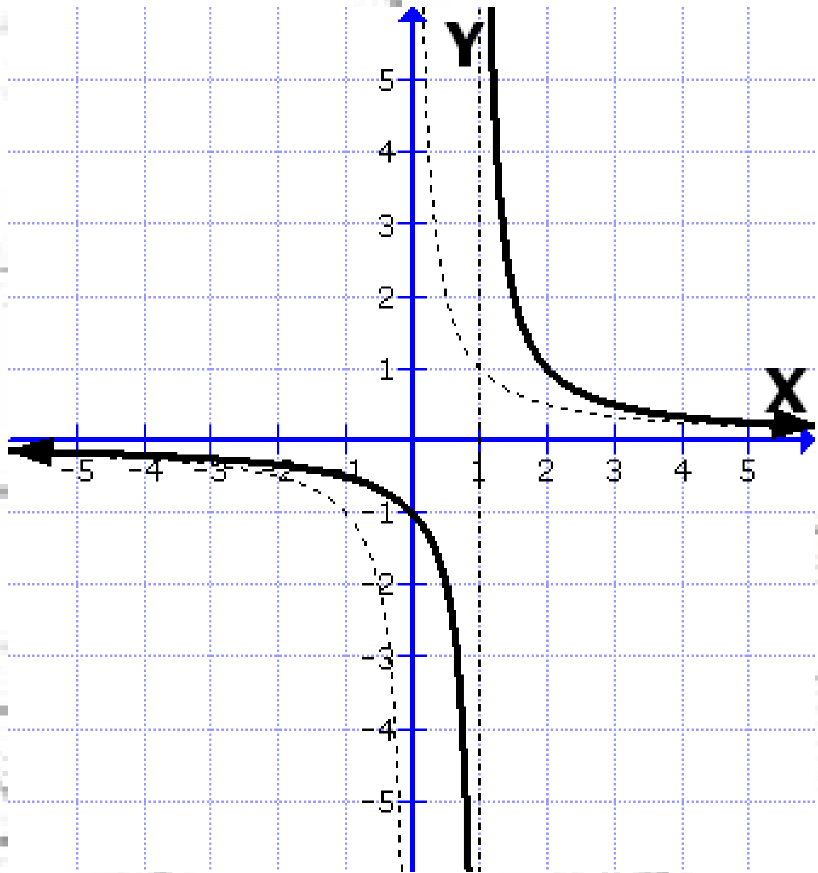
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

La Hipérbola

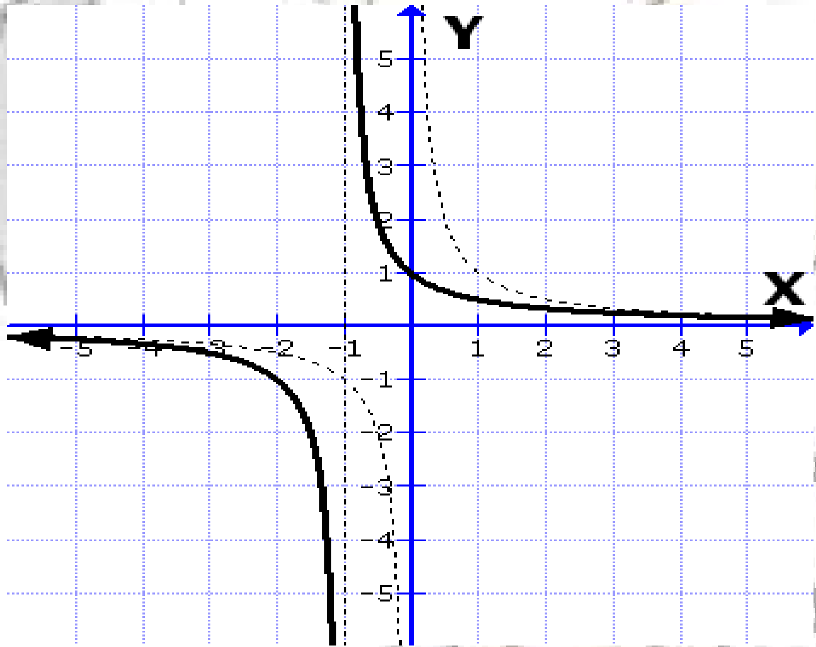


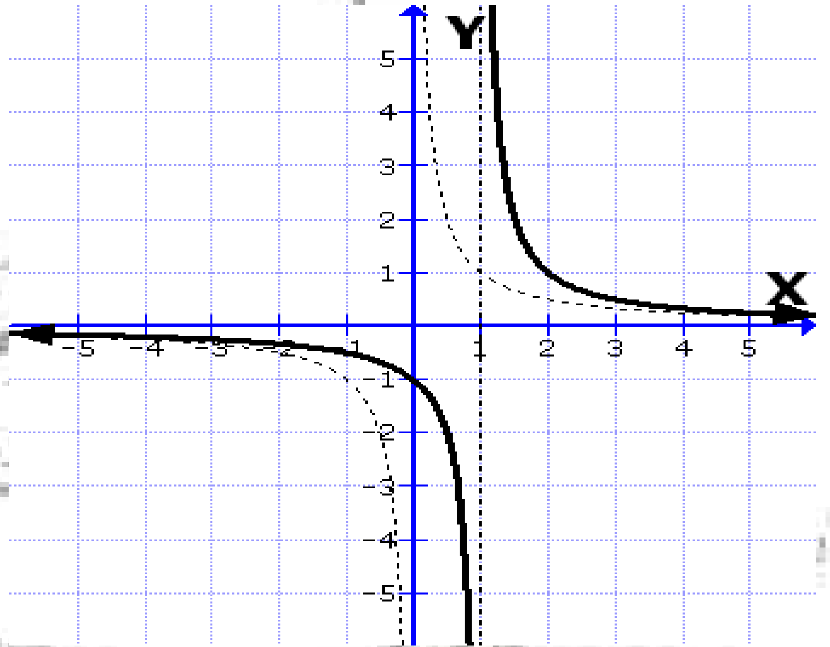
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

La Hipérbola





$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

4ª propiedad:

Si b > 0 la hipérbola se traslada a la izquierda n unidades.
Si b < 0 la hipérbola se traslada a la derecha n unidades.

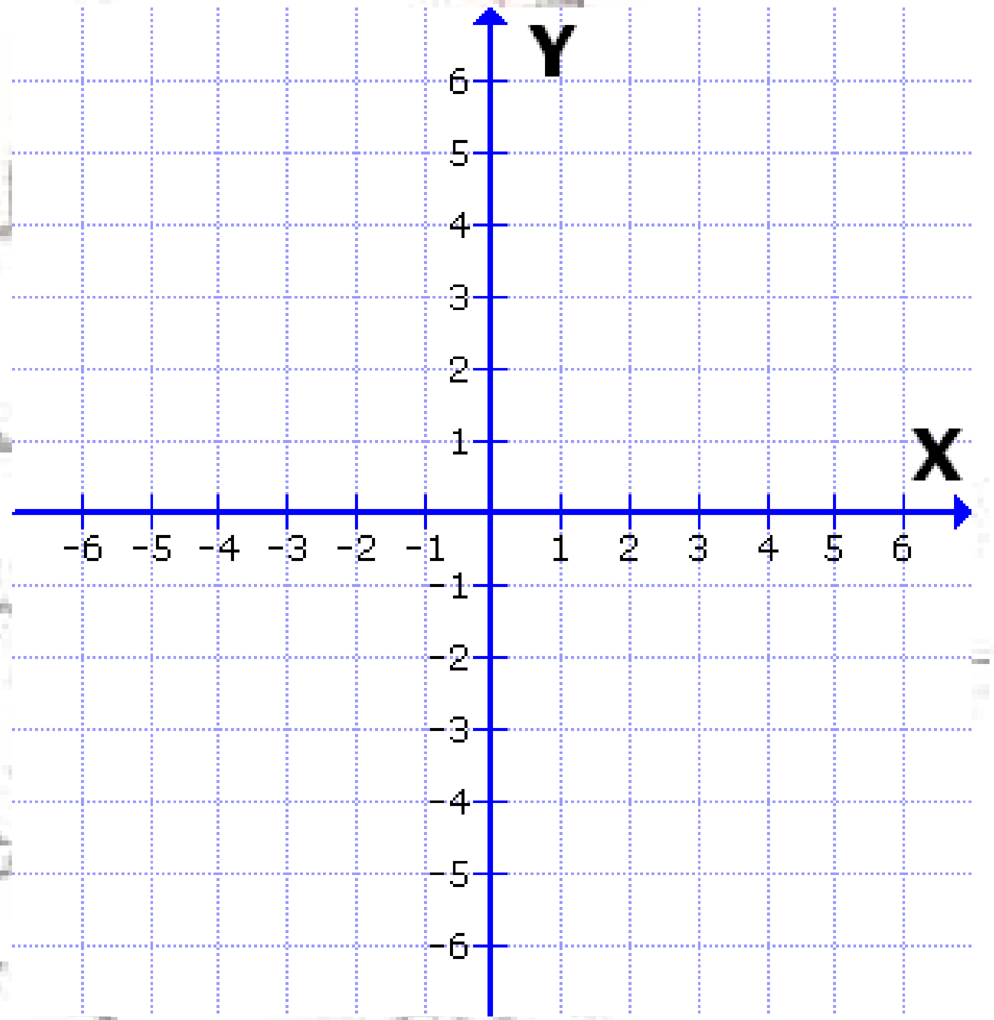
La Hipérbola

Teniendo en cuenta estas dos últimas propiedades, veamos un modo general de dibujar cualquier hipérbola dada por la fórmula...

$$f(x) = \frac{a}{x+b} + c$$

Utilizaremos este ejemplo

$$f(x) = \frac{4}{x-2} + 1$$



La Hipérbola

1º CÁLCULO DE ASÍNTOTAS.

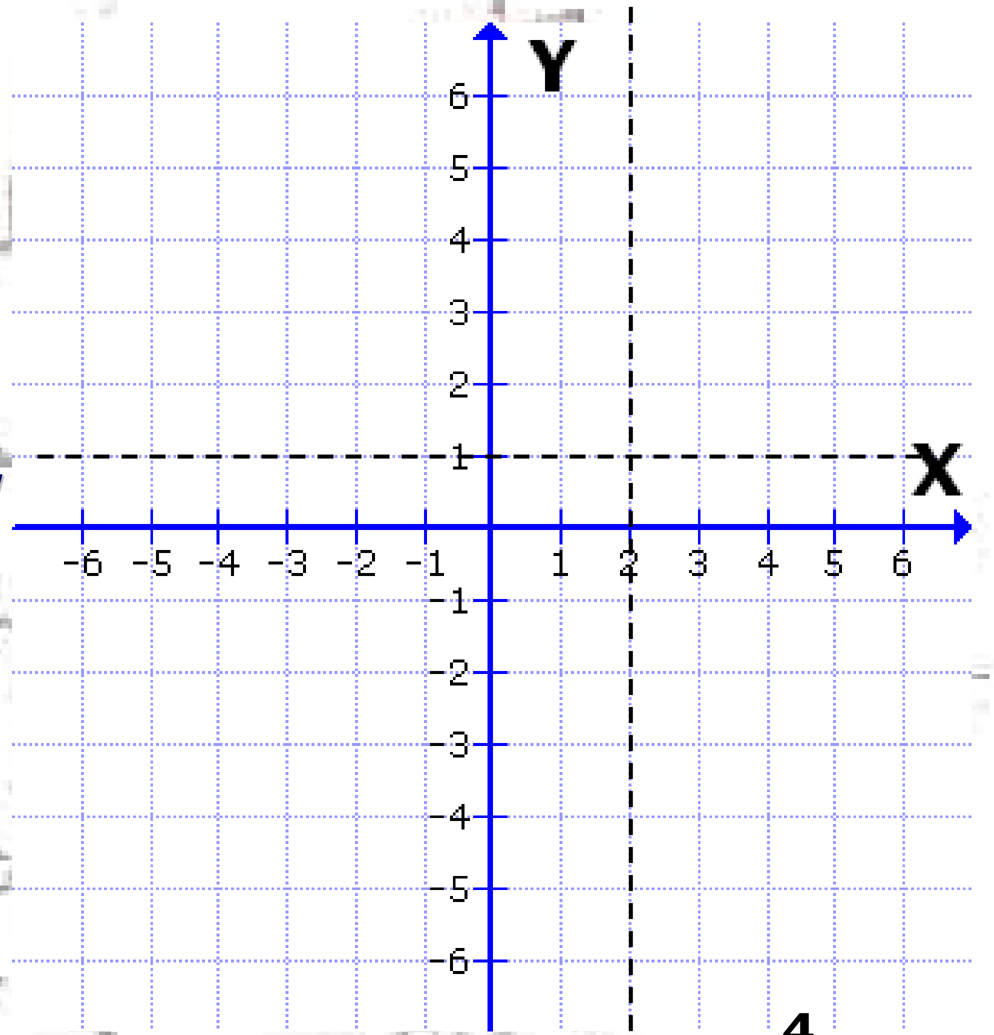
Las asíntotas son fundamentales a la hora de representarla. Estas rectas “intocables” se obtienen calculando el dominio y el recorrido de la función, ya que serán los valores de la x (dominio) y de la y (recorrido) que no puede tomar la función.

$$\boldsymbol{D_x = \mathbb{R} - \{-b\} \rightarrow x = -b}$$

$$\boldsymbol{I_{f(x)} = \mathbb{R} - \{c\} \rightarrow y = c}$$

$$D_x = \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow x = 2$$

$$I_{f(x)} = \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow y = 1$$



$$\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{x-2} + 1}$$

La Hipérbola

2º PUNTOS CORTE CON EJES.

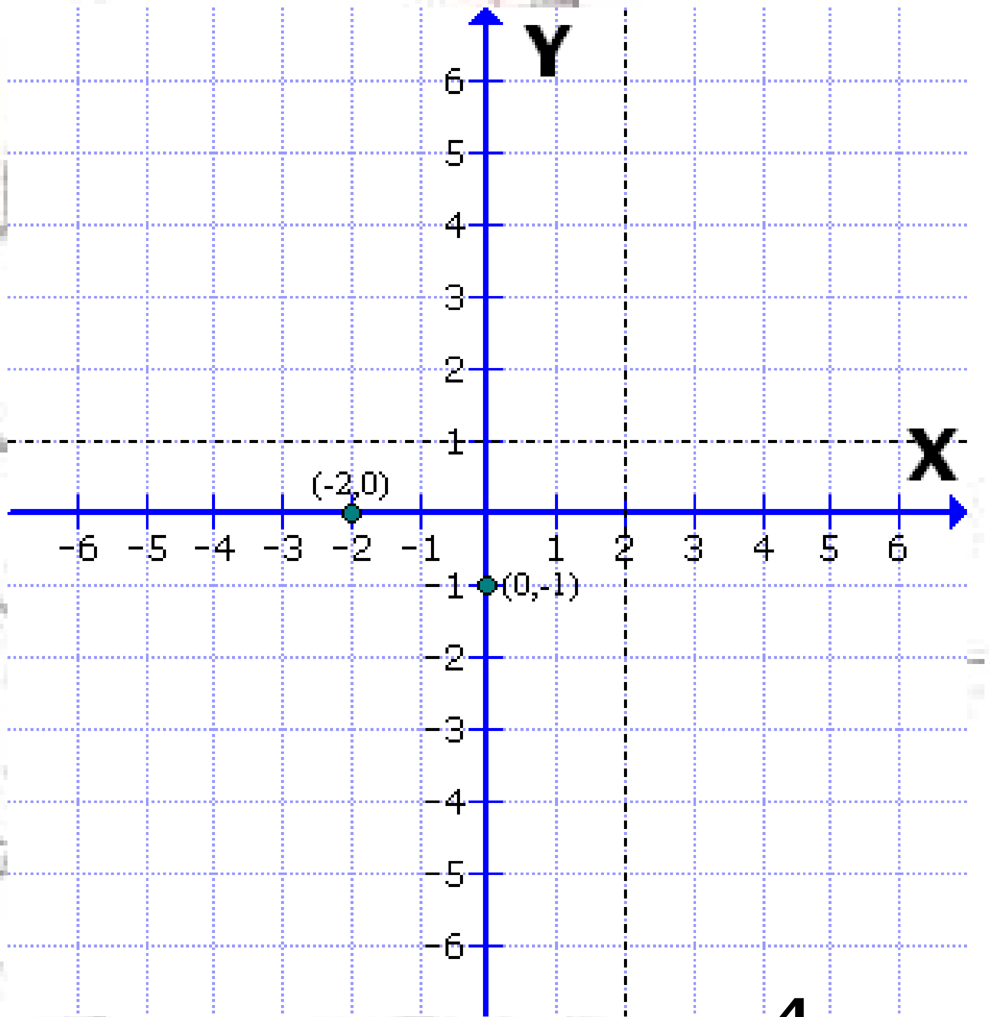
Eje vertical OY

$$\left(0, f(0)\right)$$

Eje horizontal OX

$$\left(f^{-1}(0), 0\right)$$

$$(0,-1), (-2,0)$$



$$f(x) = \frac{4}{x-2} + 1$$

La Hipérbola

3º TABLA DE VALORES.

Elaboramos la tabla de valores de la función base $f(x)=\frac{a}{x}$ como si la intersección de las asíntotas fuera el nuevo centro de coordenadas.

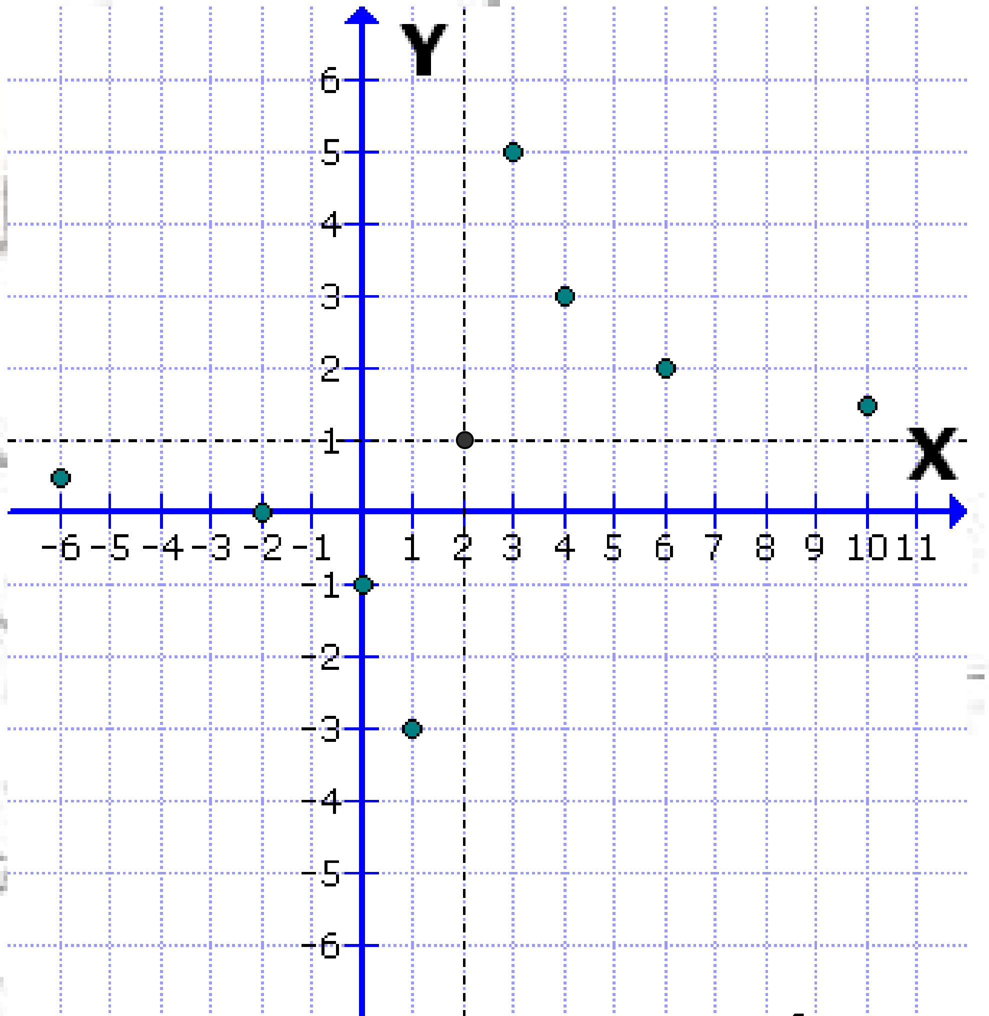
Esto nos facilitará mucho los cálculos.

Aprovechando la simetría de las asíntotas para los cálculos.

En total habrá que sacar al menos 8 puntos de la parábola.

X	4	1	-4	-1	2	-2	8	-8
Y	1	4	-1	-4	2	-2	½	-½

$$f(x)=\frac{4}{x}$$



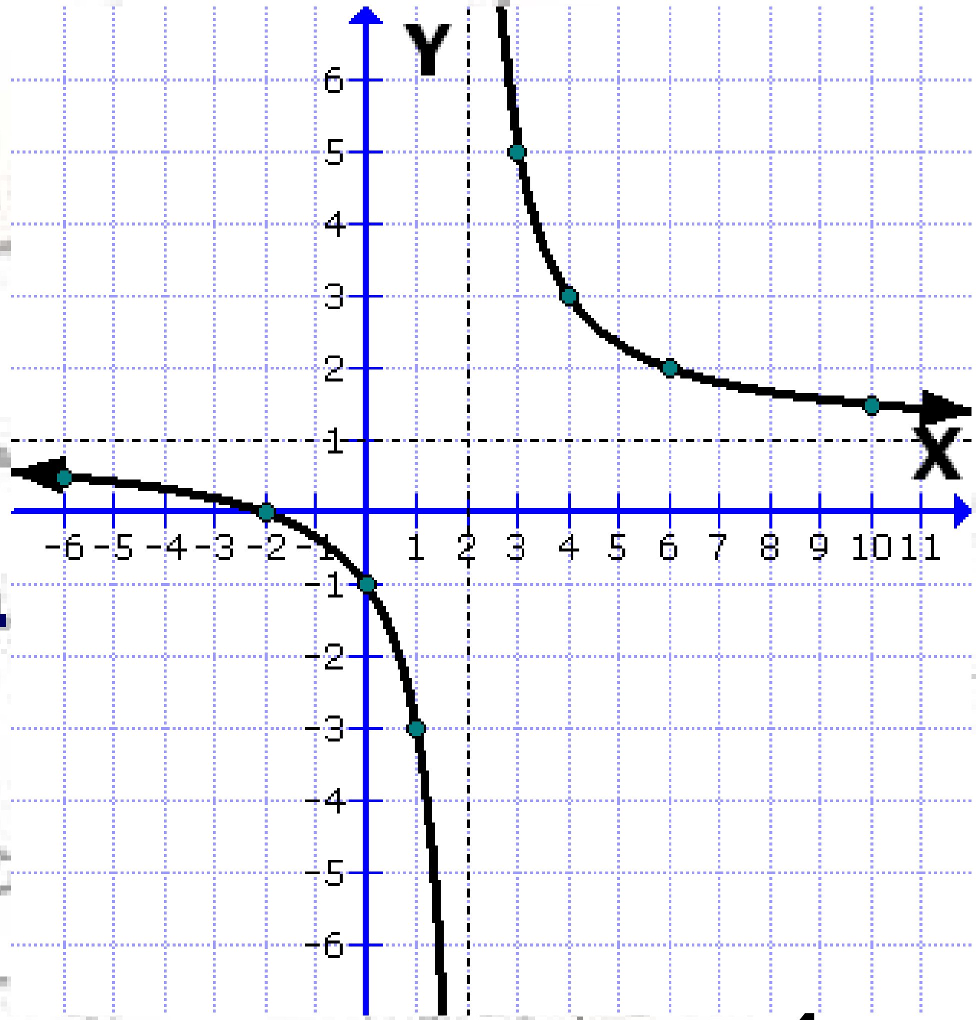
$$f(x)=\frac{4}{x-2}+1$$

La Hipérbola

4º TRAZAMOS LA HIPÉRBOLA.

RESUMEN

1º Cálculo de Asíntotas.
2º Corte con los Ejes.
3º Tabla de Valores.
4º Trazado de la Curva.



$$f(x) = \frac{4}{x-2} + 1$$